Discrete and Ultradiscrete Systems

差分と超離散

広田良吾・高橋大輔 著

共立出版

まえがき

すべての量を「連続（アナログ）から離散（デジタル）へ」と変換して考える第一歩が「差分学」である．差分学の目的は，微分を差分に置き換えると微分公式がどう変わり，差分方程式はどういう形式を持ち，その方程式の解はどう構成され，さらに差分方程式でないと記述できないものは何かを追及することである．

著者の一人（広田）が差分学を構築しようと決心してもう四半世紀が経過した．初めは微分でできることをすべて差分で置き換えるとどうなるかという考えで出発した．しかしこんな単純な発想ではすぐに壁に出会った．どんなに努力しても差分化の方法が見つからない．「差分学」というものは存在しないのか？との疑問を持つようになった．その後，努力を可積分な微分方程式の差分化に集中するようにした．可積分系では一般的な差分化の方法が存在する．差分学は可積分系の差分化という問題意識によって初めて体系的なものとなりつつある．

ところで「連続（アナログ）から離散（デジタル）へ」の精神を徹底すると，空間時間変数だけでなく，状態を表す量までもデジタル化したくなる．これは非常に難しい問題だが，解の非解析的極限を考えるという超離散化の方法によって著者の一人（高橋）を含む研究グループによって解決された．この本ではこれらの結果も詳しく説明する．

微分方程式の離散化とは微分方程式の代数化であり，微分方程式の差分化や超離散化がうまくいく背景には美しい代数的構造が隠れていると確信する

ようになった．この代数構造を明確にするのは将来の課題である．また，差分学の基礎から応用までと思ってこの本を書き始めたが，それがいかに無謀な試みであったかを痛感もした．まだまだ差分には未開拓の分野が多すぎる．

さて本書の内容についてあらすじを述べる．まず第1章は主として線形差分方程式に関する常識的な事柄の解説である．分かりやすい例題や演習問題を多くして，差分を初めて勉強する人が独習できるようにした．第1章を書いている途中で解の再帰現象に気づいた．外力項のない1階の微分方程式については，任意の初期値からの解が再びその初期値に戻るような再帰現象はない．しかし1階の差分方程式では再帰現象がある†．また，n 階の再帰方程式の独立な保存量をエレガントな方法で n 個見つけることができる．このような特徴を知るにつれ，再帰方程式に対する興味がますます深まった．

そこで予定を変更して第2章を再帰方程式の章として追加したが，まとめてみると50ページ以上になった．与えられたページ数を大幅に超過するので，面白いが面倒な部分をカットした．カットした部分に興味がある人は文献 [1] を読んでほしい．

第3章は微分方程式の差分化である．可積分な微分方程式の差分化は，逆散乱法や保存量による方法などいろいろと試みられているが，最も成功しているのは双線形化法によるものである．この方法による非線形振動子やオイラーのコマの運動方程式の差分化を詳しく議論した．残念ながらページ数の制約のため，ソリトン方程式の差分化については一部が第6章に登場する以外割愛せざるを得なかった．

第4章は差分方程式の超離散化である．この超離散化によって差分方程式から max 関数を含む方程式を得る．差分方程式では通常の四則演算がベースになっているが，超離散の方程式では和を max で積を + で定義するマックス–プラス代数が演算の基本をなしており，非常に単純明快な世界が現れてくる．にもかかわらず，元の差分方程式が持っている豊かさの大部分を引き継いでいるのである．さらに超離散化で得た方程式ではしばしば状態変数の離散化が可能となる．このことが超離散化の「超」という接頭語の由来にもなっている．

† 早稲田大学理工学研究科修士2年（2001年当時）矢作秀之君の発見．

第 5 章ではバーガーズ方程式を例にとり，超離散化のプロセスを詳しく説明する．線形化可能であるというバーガーズ方程式の強い性質を保ったまま差分化を経て超離散化を行う．すると微分・差分・超離散で解の基本構造が同じになる．さらに超離散バーガーズ方程式では，状態変数が 0 と 1 の値しか取らないデジタルモデルを得ることができ，それが交通流のモデルになっている．気体の衝撃波の方程式（微分のバーガーズ方程式）と，車を簡単なルールで動かすモデル（超離散バーガーズ方程式）とが，ある意味で同一視できるのである．

第 6 章では超離散化を発見する契機となった箱玉系について詳しく説明する．この系は，ずらっと並んだ箱に入れた複数の玉を動かす簡単なゲームとして定義できる．しかも可積分系の言葉でソリトンと呼ばれる波動現象のデジタル版が玉の動きに現れる．実は，箱玉系は差分ロトカ–ボルテラ方程式の超離散化によって得られる．このような驚くべきつながりは超離散化によってこそ得られるものである．

第 7 章ではマックス–プラス方程式による空間 2 次元の時間発展方程式を取り上げる．この方程式には，特徴的な模様を生み出すいろいろな解がある．たとえば，同心円的な縞模様が拡がったり，渦巻きがぐるぐる回ったりする．この種の模様は反応拡散系と総称される現実の系でもしばしば観察できる．この章で取り扱う方程式と反応拡散系との間に直接的な関連は今のところ見つかっていない．しかしながら，この章の結果からマックス–プラス代数の奥深さ・面白さを十分に味わえ，将来的な発展を予感することができるであろう．

なお，第 1, 2, 3 章は主として広田が，第 4, 5, 6, 7 章は主として高橋が執筆した．

最後になったが，この本の校正に貴重な助言をいただいた神戸大学大学院自然科学研究科助手の増田哲氏と，図の作成に協力をいただいた早稲田大学理工学研究科の志田篤彦君にまず感謝の意を表したい．そして，共立出版(株)編集部の小山透氏と大越隆道氏には心からのお礼を申し上げたい．脱稿するまでの実に長い間，何度も足を運んで面白い本ができますよと励ましてくださった小山氏と，出版の遅れを取り戻すべく獅子奮迅の校正作業をしていた

だいた大越氏のおかげで本書が日の目を見るのである．

2003 年 1 月　　広田良吾・高橋大輔

目　次

コラム

第1章

差分方程式

1.1　はじめに

思考をアナログ（連続）からデジタル（離散）へと変換すると，現象を記述する方程式もデジタル化される．連続的な変化を記述する微分方程式は不連続な変化を記述する差分方程式になる．

差分方程式が記述する現象は，主として人間の行為や生物の成長などミクロ過程に還元しにくい社会現象である．微分方程式が主に自然現象を記述するのとは大きな違いである．差分方程式は極限で微分方程式になるので微分より差分の方がより広いクラスの現象を考えるときに役に立つ．しかも差分方程式は計算機によって簡単に数値解が求まるという大きな利点がある．しかし現在では，この利点のために差分方程式の解の理論的研究が遅れている．計算すれば分かることを研究する必要はない !? 差分方程式の研究は今から発展する分野である．

この章で説明するのは線形差分方程式の解法である [2–4]．線形微分方程式の解法と共通する部分が多い．

1.2　差分方程式

整数 n の関数 x_n と自然数 s が与えられたとき，連続した $s+1$ 個の項 x_n, $x_{n+1},\ldots,x_{n+s}$ を考える．**差分方程式**とはこの列の間の関係式

$$F(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+s}, n) = 0 \qquad (n \text{ は整数})$$

のことである．この関係式を s 階の差分方程式という．一般に，s 階の差分方程式では連続した s 項 x_n, $x_{n+1},\ldots,x_{n+s-1}$ を与えると次の項 x_{n+s} の値が決まるが一意的とは限らない．x_{n+s} が x_n, $x_{n+1},\ldots,x_{n+s-1}$ によって一意的に表現されているときは，

$$x_{n+s} = f(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+s-1}, n) \qquad (n \text{ は整数})$$

と表せる．この差分方程式を**陽的** (explicit) 方程式または**漸化式**という．x_n を決めるための初めの s 項 x_0, x_1, $x_2,\ldots,x_{s-1}$ を s 階の差分方程式の**初期値**または**初期条件**という．初期値を与えて差分方程式を解く（x_n の値を初期値によって表す）問題を**初期値問題**という．

差分方程式の例題

例題 1　ハノイの塔

中央に穴のあいた大きさの異なる n 個の円板を考え，一番下が一番大きく上へいくほどだんだん小さくなるように重ねて木釘 A にはめてあるとする．これらの円板を一度に 1 個づつ動かしながら，別の木釘 B に移そうと思う．円板を一時的に置いておくために，もう 1 本の木釘 C が利用できる．なお，円板を動かす途中で小さい円板の上に大きい円板をおくことができないとする．木釘 A の n 個の円板を木釘 B に移して元と同じ重なり方になるようにするには最低何回円板を動かせばよいか？

考え方　n 個の円板を移すのに，まず上の $n-1$ 個の円板を木釘 C に移動させる．そして残された一番大きい円板を木釘 B に移動させる．その後，木釘 C にある $n-1$ 個の円板を木釘 B に移動させる．

n 個の円板すべてを別の木釘に動かす最小回数を x_n とする．$n-1$ 個の円板を別の木釘に動かす回数は x_{n-1} である．上の考え方より漸化式

$$x_n = 2x_{n-1} + 1, \qquad x_1 = 1 \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

が得られる．この漸化式を解いて

$$x_n = 2^n - 1$$

が求める回数となる．

例題 2a 兎のつがい

囲いの中に，生まれたばかりの 1 つがいの子兎がいたとき，N 月たってこの 1 つがいの兎が合計何つがいに増えるかを知りたい．ただし 1 つがいの親兎はひと月に 1 つがいの子兎を産むとし，子兎は生まれた次の月で子を産める親兎になりその次の月から子を産めるとする [5].

考え方 n 月後の親兎のつがい数を y_n，子兎のつがい数を z_n とすると，その次の月，$n+1$ 月後の親兎のつがい数は（子兎が成長するので）$y_n + z_n$，新しく生まれた子兎のつがい数は y_n となる．その次の次の月，$n+2$ 月後の親兎のつがい数は $2y_n + z_n$，新しく生まれた子兎のつがい数は $y_n + z_n$ となる．

n 月後のつがいの総数を $x_n(= y_n + z_n)$ とすると，上の考え方によって $n+2$ 月後のつがいの総数 $x_{n+2} = 3y_n + 2z_n$ は，n 月後のつがいの総数 $x_n = y_n + z_n$ と $n+1$ 月後のつがいの総数 $x_{n+1} = 2y_n + z_n$ との和になっている．

すなわち漸化式は

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \tag{1.1}$$

となる．この漸化式で表される数列 x_n を**フィボナッチ数列** (Fibonacci sequence) という．初期条件は $x_0 = 1, x_1 = 1$ である．この漸化式を解くと（解法は問 1.9 (iii) でのべる）

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

となる．x_N が N 月後のつがいの総数を表す式である．

例題 2b　階段の上がり方

N 段の階段を上がるのに，一足で1段または2段上がるものとする．その上がり方の数（場合の数）を求めよ．

考え方　$n+2$ 段まで上がったとき，直前の上がり方は $n+1$ 段目から1段上がったか，n 段目から2段上がったかの2通りしかない．

n 段の階段を上がる上がり方の数を x_n と表す．$n+2$ 段の上がり方は上の考え方より $x_{n+1}+x_n$ になる．したがって漸化式は (1.1) と同じ式

$$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$$

になる．

初期条件は $x_1=1$, $x_2=2$ であり，例題 2a の x_1, x_2 に等しいので解は同じく

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

となる．したがって x_N が N 段の階段を上がる上がり方の数である．

例題 3　算術幾何平均

2つの正数 a_0, b_0 の算術平均と幾何平均をそれぞれ a_1, b_1 とする．

$$a_1=\frac{a_0+b_0}{2},\qquad b_1=\sqrt{a_0b_0}$$

さらに a_1, b_1 の算術平均と幾何平均を a_2, b_2 とする．

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\qquad b_2=\sqrt{a_1b_1}$$

以下順次

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\qquad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\qquad (n\geq 0)$$

とする．これらは a_0, b_0 を初期値とする連立した漸化式である．

数列 a_n, b_n は $n\to\infty$ で**算術幾何平均**と呼ばれる共通の極限 $M=M(a_0,b_0)$ に収束する．この極限は第1種完全楕円積分

$$I(a_0,b_0)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{a_0^2\cos^2\phi+b_0^2\sin^2\phi}}$$

と次の関係で結ばれている [6].

$$I(a_0, b_0)M(a_0, b_0) = \frac{\pi}{2}$$

注：金田康正氏は算術幾何平均アルゴリズムを利用して π の値を 10 億桁計算し世界記録を作った（1989 年）[7].

例題 4 ニュートン法

点 x_0 における関数 $f(x)$ のテーラー展開の公式を使うと $f(x)$ は次式で近似される.

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

この近似式は x が x_0 に近づくほど良い近似になっている.

方程式 $f(x) = 0$ の解を計算するためにこの近似式を利用する. 方程式 $f(x) = 0$ の代わりに近似方程式

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0$$

の解を求めると,

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

となる. $x = x_1$ とおくと,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

である. これを方程式 $f(x) = 0$ の第 1 近似と考える.

この x_1 における関数 $f(x)$ の近似式

$$f(x) \approx f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1)$$

を使うと, x_1 を求めた計算と全く同じ計算で次の近似値 x_2 が

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

と求まる. これを方程式 $f(x) = 0$ の第 2 近似と考える. 以下同じ手順を繰り返すと, 解の第 n 近似と第 $n+1$ 近似との関係式は次式になる.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.2}$$

これは 1 階の差分方程式（漸化式）である．

例題として簡単な 2 次方程式

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

を考える．解は $x = \sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ である．(1.2) より漸化式は

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

となる．たとえば $x_0 = 1$ を第 0 近似とすると

$$x_1 = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2} = 1.5$$
$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{17}{12} = 1.41666\cdots$$
$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \frac{577}{408} = 1.414215\cdots$$

となって真の値 $\sqrt{2}$ に近づいていく．

注：ニュートン法の計算はコンピュータを使うと一瞬で終わる．
蛇足：前述の金田康正氏は π を 10 億桁計算するために $1/\sqrt{2}$ と $\sqrt{2}$ を 16 億桁以上計算している [7].

1.3　1 階線形差分方程式

1 階差分方程式 $F(x_n, x_{n+1}) = 0$ の中で最も簡単な方程式は **1 階線形差分方程式**である．a_n, b_n を n の既知関数とすると，1 階線形差分方程式の一般形は

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\quad a_n \neq 0) \tag{1.3}$$

となる．線形というのは上式が x_n, x_{n+1} の 1 次式で表されていることに由来する．たとえば次の**ロジスティック写像** (logistic mapping)

$$x_{n+1} = a x_n (b - x_n)$$

には 2 次の項 x_n^2 があるので 1 階**非線形**差分方程式である．

■ 有限と無限：回転体の体積と表面積（その 1）

図のように，$x \geq 1$ の範囲の曲線 $y = 1/x$ を x 軸の周りに回転させてできる図形を考える．この回転体の体積 V は

$$V = \int_1^{\infty} \frac{\pi}{x^2} dx = \pi$$

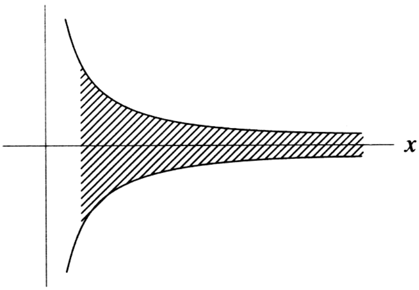
となって有限の値になる．ところがこの回転体の表面積 S は

$$S = \int_1^{\infty} \frac{2\pi}{x} dx = \infty$$

となる．回転体の体積が有限なのに表面積が無限大なのは当たり前か？数学としてはこの結果に何の矛盾も感じない！しかし物理・工学的な感覚からは何かがおかしい．

この回転体を直立させて器と考える．回転体に水をいっぱいに入れる．回転体の体積は水の量に等しい．いっぱいに入れた水を流し出す．回転体の表面が濡れて水が残っている．この残っている水の量は“表面積×膜の厚さ”である．もちろん流れ出した水の量だけ元の体積の方が残った水の量より多い．

しかし表面積が無限大だと残っている水の量は体積より大きくなる．これはおかしい！



1 階線形差分方程式（タイプ I）の解法

方程式 (1.3) の初期値問題の解を考える．最初は最も簡単な場合から始めよう．(1.3) で $a_n = 1$ とおく．x_n を左辺に移動すると

$$x_{n+1} - x_n = b_n \tag{1.4}$$

となる．この方程式を以後**タイプ I** と呼ぶ．この式を $n = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ について書き並べると次のようになる．

$$x_1 - x_0 = b_0,$$

$$x_2 - x_1 = b_1,$$

$$x_3 - x_2 = b_2,$$

$$\vdots$$

$$x_n - x_{n-1} = b_{n-1}$$

これらを足し合わせると，左辺は $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ が互いに打ち消しあって，残るのは $x_n - x_0$ だけとなり，右辺は $b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}$ となる．したがって

$$x_n - x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$$

となる．これより，x_0 を初期値として解 x_n は

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \tag{1.5}$$

で与えられる．

注：タイプIの差分方程式 (1.4) は小さな定数 δ を導入して $t = n\delta$ とおき，$x_n = x(t)$, $b_n = \delta b(t)$ と書き表すと，$\delta \to 0$ の極限で，(条件が必要だが) 微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = b(t)$$

になる．一方，解 (1.5) は，

$$x(t) = x(0) + \int_0^t b(t')dt'$$

になる．

1階線形差分方程式（タイプII）の解法

次に，(1.3) で $b_n = 0$ とおく．x_n を左辺に移動すると次式が得られる．

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = a_n \tag{1.6}$$

この方程式を以後**タイプII**と呼ぶ．この式を $n = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ について書き並べると次の形になる．

$$\frac{x_1}{x_0} = a_0,$$
$$\frac{x_2}{x_1} = a_1,$$
$$\frac{x_3}{x_2} = a_2,$$
$$\vdots$$
$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = a_{n-1}$$

これらを掛け合わせると，左辺は $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ が互いに打ち消しあって，残るのは $\dfrac{x_n}{x_0}$ だけとなり，右辺は $a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$ となる．したがって

$$\frac{x_n}{x_0} = \prod_{k=0}^{n-1} a_k$$

が得られる．なお，$\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} a_k$ は「k が 0 から $n-1$ の範囲の a_k をすべて掛けよ」という演算を意味し，$n = 0$ のとき値を 1 とする．これより，x_0 を初期値として解 x_n は次式で与えられる．

$$x_n = x_0 \prod_{k=0}^{n-1} a_k$$

注：すべての n に対して $x_n > 0$, $a_n > 0$ のとき差分方程式 (1.6) の対数をとると，

$$\log x_{n+1} - \log x_n = \log a_n$$

となる．そこで新しい変数 y_n，定数 α_n を次のように導入する．

$$y_n = \log x_n, \qquad \alpha_n = \log a_n$$

この変換によってタイプ II はタイプ I

$$y_{n+1} - y_n = \alpha_n$$

に変わる．新しい変数を導入して差分方程式を既知の方程式に変換する方法を変数変換法という．

■ 有限と無限：回転体の体積と表面積（その 2）

「その 1」の話の物理的解釈をする．水は直径 a の原子（分子）より成り立っていると考える．回転体の半径 x が $a/2$ より小さくなると，その奥には水の原子は浸入できないので回転体の表面積の計算で，積分の上限は $2/a$ までである．

$$\int_1^{2/a} \frac{2\pi}{x}dx = 2\pi\left[\log x\right]_1^{2/a} = 2\pi\log\frac{2}{a}$$

この値を a 倍（膜の厚さ a）したもの $2a\pi\log\dfrac{2}{a}$ が表面に残った水の量と考える．この量は $a \to 0$ の極限で 0 になり矛盾は解決された．

つまり，原子の大きさ a を考慮しないと問題は解決しない！

1.4　1 階線形非同次差分方程式

a_n, b_n を n に依存する既知関数とするとき，次の形の式

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \quad a_n \neq 0) \tag{1.7}$$

を 1 階線形非同次差分方程式という．

注：x_n の次数が 1 次と 0 次（b_n の項）であるので非同次という．

1 階線形差分方程式（タイプ III）の解法

式 (1.7) で a_n, b_n を定数 $(a_n = a \neq 0,\ b_n = b)$ とした 1 階線形非同次差分方程式

$$x_{n+1} = ax_n + b \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.8}$$

を考え，これを**タイプ III** と呼ぶ．この方程式を解くには大別して次の 2 つの方法がある．

(i)　逐次代入法

$$x_1 = ax_0 + b$$

$$x_2 = ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b = a^2x_0 + b(1 + a)$$

$$x_3 = ax_2 + b = a(a^2x_0 + b(1 + a)) + b = a^3x_0 + b(1 + a + a^2)$$

この結果を眺めて一般項 x_n を推定すると，

$$x_n = a^n x_0 + b(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) \tag{1.9}$$

となる．これを確かめるために (1.8) に代入すると，左辺は

$$x_{n+1} = a^{n+1} x_0 + b(1 + a + a^2 + \cdots + a^n)$$

となり，右辺は

$$\begin{aligned} ax_n + b &= a[a^n x_0 + b(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1})] + b \\ &= a^{n+1} x_0 + b(1 + a + a^2 + \cdots + a^n) \end{aligned}$$

となるので確かに (1.9) は解である．

注：逐次代入法はエレガントな解法ではないが，最も強力な解法である．ほとんどすべての差分方程式に適用可能である．しかし単調な計算を繰り返す忍耐力と未知の一般項を発見する飛躍した想像力が必要である．優れた研究者はこの 2 つの能力を兼ね備えている．

(ii)　**変数変換法**

非同次方程式の変数を変換して非同次項を消去し，同次方程式を導いて解く方法である．これには 2 つの方法がある

(ii-a)　**差分法**

2 つの非同次方程式

$$x_{n+1} = ax_n + b,$$

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + b$$

の差をとると

$$x_{n+2} - x_{n+1} = a(x_{n+1} - x_n)$$

となって同次方程式が得られる．ここで新しい変数

$$y_n = x_{n+1} - x_n \tag{1.10}$$

を導入すると，この方程式はタイプ II の方程式

$$y_{n+1} = ay_n$$

となり，解は既知で

$$y_n = a^n y_0 \tag{1.11}$$

で与えられる．初期値 y_0 は式 (1.10) より

$$y_0 = x_1 - x_0 = (a-1)x_0 + b$$

である．解 (1.11) を変換式 (1.10) に代入すると，タイプ I の方程式

$$x_{n+1} - x_n = a^n y_0$$

となり，

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^k y_0 \\ &= x_0 + ((a-1)x_0 + b)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) \\ &= a^n x_0 + b(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) \end{aligned}$$

となる．当然のことであるが逐次代入法で求めた解と同じ解が得られた．

(ii-b)　定数変化法

この方法では，まず天下りに（タイプ II の）同次方程式

$$\hat{x}_{n+1} = a\hat{x}_n \tag{1.12}$$

の解 $\hat{x}_n$ を求める．次にその解に含まれる任意定数が変化した（定数変化）のが非同次方程式の解であると考える．つまり非同次方程式も同次方程式も解の構造はほとんど同じと見るのである．

方程式 (1.12) の解は c を任意定数として

$$\hat{x}_n = ca^n$$

となる．次に非同次方程式 (1.8) の解では定数 c が変化して n に依存する未知関数 c_n であると仮定する．

$$x_n = c_n a^n \tag{1.13}$$

未知関数 c_n を決定するために解 (1.13) を非同次方程式 (1.8) に代入すると

$$c_{n+1}a^{n+1} = ac_n a^n + b$$

となる．両辺を a^{n+1} で割ると，c_n に対するタイプ I の方程式

$$c_{n+1} = c_n + ba^{-n-1}$$

になる．解は

$$c_n = c_0 + \sum_{k=0}^{n-1} ba^{-k-1}$$

である．この c_n を (1.13) に代入して非同次方程式の解

$$x_n = \left(c_0 + \sum_{k=0}^{n-1} ba^{-k-1}\right)a^n$$

が得られる．書き換えると

$$x_n = c_0 a^n + \sum_{k=0}^{n-1} ba^{n-k-1} = c_0 a^n + b\sum_{k=0}^{n-1} a^k$$

となる．(1.13) に $n=0$ を代入すれば

$$c_0 = x_0$$

である．当然のことであるが今までの方法で求めた解と一致している．

問 1.1 次の数列 x_n について，x_{n+1} と x_n の関係を示す漸化式を作れ．ただし，a, b, p は定数とし，特に指定されないときは $n = 0, 1, 2, \ldots$ とする．

(i) $x_n = an + b$　(ii) $x_n = ap^n$　(iii) $x_n = 2^n - 1$

(iv) $x_n = \dfrac{1}{n}$　$(n = 1, 2, 3, \ldots)$　(v) $x_n = ap^n + b$

問 1.2 $n=0,1,2,\ldots$ とする．次の 1 階差分方程式を解け．

(i) $x_{n+1}=x_n+2n+1, \qquad x_0=0$

(ii) $x_{n+1}=x_n+a_{n+1}-a_{n-1}, \qquad a_0=a_{-1}=0, \quad x_0=0$

(iii) $(n+1)x_{n+1}=(n+2)^2x_n, \qquad x_0=1$

(iv) $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{x_n+1}, \qquad x_0=1$

(v) $(n+2)x_{n+1}=(n+1)x_n+2n-1, \qquad x_0=1$

(vi) $x_n-x_{n+1}=(n+2)x_{n+1}x_n, \qquad x_0=1$

(vii) $(n+1)x_{n+1}-(n+2)x_n+2=0, \qquad x_0=1$

定数変化法

定数変化法を用いて 1 階線形非同次方程式

$$x_{n+1}=a_nx_n+b_n \qquad (n=0,1,2,\ldots, \quad a_n\neq 0) \tag{1.14}$$

を解いてみよう．まず天下りにタイプ II の同次方程式

$$\hat{x}_{n+1}=a_n\hat{x}_n$$

の解

$$\hat{x}_n=c\prod_{k=0}^{n-1}a_k$$

を考える．ここで c は任意の定数である．同次方程式なので任意定数がある．非同次方程式 (1.14) の解 x_n はこの定数 c を n に依存する形で与え（定数変化法），

$$x_n=c_n\prod_{k=0}^{n-1}a_k$$

この x_n が (1.14) の解になるように c_n を決定する．代入すると

$$c_{n+1}\prod_{k=0}^{n}a_k=a_nc_n\prod_{k=0}^{n-1}a_k+b_n$$

となる．c_{n+1} と c_n の係数はともに $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k$ であるので上式をこの係数で割ると，タイプ I の差分方程式

$$c_{n+1} = c_n + \frac{b_n}{\prod_{k=0}^{n} a_k}$$

が得られる．解 c_n は

$$c_n = c_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{\prod_{k=0}^{j} a_k}$$

と表される．したがって (1.14) の解 x_n は

$$x_n = \left(c_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{\prod_{k=0}^{j} a_k}\right) \prod_{k=0}^{n-1} a_k$$

と表される．定数 c_0 を初期値 x_0 より定め，関係式 $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} a_k \Big/ \prod_{k=0}^{j} a_k = \prod_{k=j+1}^{n-1} a_k$ を使うと

$$x_n = \Big(\prod_{k=0}^{n-1} a_k\Big) x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\prod_{k=j+1}^{n-1} a_k\Big) b_j$$

となる．この解はパラメータ $c_0(= x_0)$ を含んだ同次方程式の解

$$c_0 \Big(\prod_{k=0}^{n-1} a_k\Big)$$

とパラメータを含まない特解

$$\sum_{j=0}^{n-1} \Big(\prod_{k=j+1}^{n-1} a_k\Big) b_j$$

の和として表現されている．この構造は高階線形非同次方程式になっても変わらない．

問 1.3 $n = 0, 1, 2, \ldots$ とする．次の 1 階差分方程式を解け．

$$x_{n+1} - 2x_n = 2 \cdot 3^n, \qquad x_0 = 3$$

問 1.4 $n=0,1,2,\ldots$ とする．次の 1 階差分方程式を解け．

$$x_{n+1}-(n+1)x_n=(n+2)!,\qquad x_0=1\qquad (\text{ただし } 0!=1 \text{ とする})$$

問 1.5 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α,β とするとき，A, B を定数として

$$x_n=A\alpha^n+B\beta^n$$

とおけば x_n は差分方程式

$$ax_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n=0\qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

を満たしていることを証明せよ．

問 1.6 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が $x=\alpha$ なる重解をもつとき，A, B を定数として

$$x_n=(A+Bn)\alpha^n$$

とおけば x_n は差分方程式

$$ax_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n=0\qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

を満たしていることを証明せよ．

1.5　2 階線形差分方程式

n を整数とし p_n, q_n, r_n を n の既知関数としたとき，次の形の差分方程式

$$x_{n+2}+p_nx_{n+1}+q_nx_n=r_n \tag{1.15}$$

を **2 階線形非同次差分方程式**という．

解の一意性

差分方程式 (1.15) は漸化式

$$x_{n+2}=-p_nx_{n+1}-q_nx_n+r_n$$

の形に書き直せる．したがって初期値，たとえば x_0, x_1 の値を決めると逐次代入法によって $x_2, x_3, \ldots$ の値が一意的に決定される．すなわち (1.15) では**解の一意性**が成り立っている．

2 階線形同次差分方程式

(1.15) で任意の n に対して $r_n = 0$ とする次の形の方程式を **2 階線形同次差分方程式**という．

$$x_{n+2} + p_n x_{n+1} + q_n x_n = 0 \tag{1.16}$$

今，区間 $n_1 \le n \le n_2$ の範囲の解 x_n を考えよう．このためには p_n, q_n は $n_1 \le n \le n_2 - 2$ の範囲で定義されていればよい．また p_n, q_n はその範囲で有限であり，さらに

$$\prod_{n=n_1}^{n_2-2} q_n \neq 0$$

の条件を仮定する．この条件により q_n は $n_1 \le n \le n_2 - 2$ の範囲で常に 0 でない．すると，(1.16) は

$$x_{n+2} = -p_n x_{n+1} - q_n x_n$$

$$x_n = -\frac{1}{q_n} x_{n+2} - \frac{p_n}{q_n} x_{n+1}$$

と 2 通りに変形できる．ということは，x_n, x_{n+1} から x_{n+2} を決めることも，x_{n+2}, x_{n+1} から x_n を決めることもできるので，$n_1 \le n \le n_2$ の区間内の任意の隣り合う 2 点を初期値として解が一意的に決まる．

解の重ね合わせ

さて何らかの方法で (1.16) の 2 つの解 f_n, g_n

$$f_{n+2} + p_n f_{n+1} + q_n f_n = 0$$

$$g_{n+2} + p_n g_{n+1} + q_n g_n = 0$$

が見つかったとする．このとき f_n, g_n の線形結合（c_1, c_2 は定数）

$$\hat{x}_n = c_1 f_n + c_2 g_n \tag{1.17}$$

もまた (1.16) の解になる．なぜなら

$$\begin{aligned}&\hat{x}_{n+2} + p_n\hat{x}_{n+1} + q_n\hat{x}_n\\&\quad = c_1(f_{n+2} + p_n f_{n+1} + q_n f_n) + c_2(g_{n+2} + p_n g_{n+1} + q_n g_n)\\&\quad = 0\end{aligned}$$

となるからである．(1.17) を**解の重ね合わせ**という．

解の重ね合わせによって得られた新しい解 $\hat{x}_n$ は (1.16) の一般解になっているのか？言い換えると (1.16) のどんな解も (1.17) のように解の重ね合わせで書けるか？という疑問が生じる．このことに答えるための便利な量をまず導入しよう．

カソラチ行列式

(1.16) の解 f_n, g_n を用いて次の行列式を定義する．

$$\det\begin{pmatrix} f_n & f_{n+1} \\ g_n & g_{n+1} \end{pmatrix} = f_n g_{n+1} - f_{n+1} g_n$$

この行列式を f_n, g_n の**カソラチ行列式** (Casorati determinant) と呼び $C[f,g]_n$ と表す．今の区間に対して $C[f,g]_n$ は $n_1 \leq n \leq n_2 - 1$ で定義される．カソラチ行列式は関数やベクトルの一次独立性を検証するための大切な量であり，微分方程式における**ロンスキアン** (Wronskian)（あるいは**ロンスキー行列式**）を差分化したものである．

カソラチ行列式 $C[f,g]_n$ には次の性質がある．n を 1 だけずらすと

$$C[f,g]_{n+1} = \det\begin{pmatrix} f_{n+1} & f_{n+2} \\ g_{n+1} & g_{n+2} \end{pmatrix}$$

となる．f_{n+2}, g_{n+2} は (1.16) を満たすので

$$\begin{aligned}C[f,g]_{n+1} &= \det\begin{pmatrix} f_{n+1} & -p_n f_{n+1} - q_n f_n \\ g_{n+1} & -p_n g_{n+1} - q_n g_n \end{pmatrix}\\&= q_n C[f,g]_n\end{aligned}$$

となる．すなわち $C[f,g]_n$ は差分方程式

$$C[f,g]_{n+1} = q_n C[f,g]_n$$

を満たす．この方程式より $m < n$ を満たす整数 m, n に対して

$$C[f,g]_n = \Bigl(\prod_{k=m}^{n-1} q_k\Bigr) C[f,g]_m$$

である．したがって区間内（そこでは q_n は有限であり $q_n \neq 0$ である）では $C[f,g]_n$ は恒等的に 0 であるか 0 にならないかのどちらかである．

もし，

(i)　f_n, g_n の少なくとも片方が恒等的に 0 になる．
(ii)　f_n, g_n の片方が他方の 0 でない定数倍になっている．

のどちらかが成り立てば $C[f,g]_n$ が恒等的に 0 になるのは明らかであろう．逆に，$C[f,g]_n$ が恒等的に 0 であれば上の (i), (ii) のどちらかが成立する．このことを証明しよう．

証明

まず，ある m で $C[f,g]_m = 0$ のとき，

(a) $f_m = f_{m+1} = 0$　　(b) $g_m = g_{m+1} = 0$

(c) $f_m = g_m = 0,\ f_{m+1} \neq 0,\ g_{m+1} \neq 0$

(d) $f_{m+1} = g_{m+1} = 0,\ f_m \neq 0,\ g_m \neq 0$

(e) $f_m \neq 0,\ f_{m+1} \neq 0,\ g_m \neq 0,\ g_{m+1} \neq 0$

の 5 通りの場合が考えられる．

(a) のときは，その f_m, f_{m+1} を初期値とみなして (1.16) を満たす解 f_n を作ると，f_n は明らかに恒等的に 0 になる．同様に (b) のときは g_n が恒等的に 0 になる．(c) のとき $g_{m+1} = cf_{m+1}$ $(c \neq 0)$ とすると，g_m も $g_m = cf_m$ と書けるので，f_m, f_{m+1} を初期値とする解 f_n と g_m, g_{m+1} を初期値とする解 g_n は，$g_n = cf_n$ の関係にある．つまり片方が他方の定数倍になる．(d) のときも同様である．

(a)～(d) については，それら条件を満たす m が 1 点でも存在すれば上の (i), (ii) が示されるので，残りは任意の m で (e) が成立する場合である．このとき，$C[f,g]_n$ が恒等的に 0 であるという仮定より m によらず

$$\frac{g_{m+1}}{f_{m+1}} = \frac{g_m}{f_m}$$

が成り立つので，g_m/f_m が定数となり，片方が他方の定数倍になる．証明終わり．

2つの関数 f_n, g_n が区間 $n_1 \le n \le n_2$ で上の (i), (ii) のどちらかの条件を満たすとき，f_n, g_n は区間 $n_1 \le n \le n_2$ で**一次従属**であるという．また，区間 $n_1 \le n \le n_2$ で一次従属でないとき f_n, g_n は区間 $n_1 \le n \le n_2$ で**一次独立**であるといい，f_n, g_n を**基本解**と呼ぶ．

一次独立性は次のように表現することもできる．いま，区間 $n_1 \le n \le n_2$ の任意の n に対して，c_1, c_2 を定数として

$$c_1 f_n + c_2 g_n = 0$$

が成り立っているとしよう．このときの c_1, c_2 が $c_1 = c_2 = 0$ しかありえないならば f_n, g_n は一次独立であり，そうでなければ一次従属である．なぜなら，$c_1 \neq 0$ あるいは $c_2 \neq 0$ なら上式よりそれぞれ $f_n = -\dfrac{c_2}{c_1} g_n$, $g_n = -\dfrac{c_1}{c_2} f_n$ とできるので (i), (ii) のどちらかが成立し，逆に (i), (ii) のどちらかが成立するなら明らかに c_1, c_2 の少なくとも片方を0でないようにとれるからである．

問 1.7 基本解 $\sin(kn)$, $\cos(kn)$ のカソラチ行列式 $C[f,g]_n$ の値を計算せよ．

問 1.8 基本解 f_n, g_n を次のように一次変換したものを解 f'_n, g'_n とする．

$$\begin{pmatrix} f'_n \\ g'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}$$

カソラチ行列式 $C[f',g']_n$ と $C[f,g]_n$ の関係を示せ．

解の重ね合わせと一般解

では，18ページの疑問，すなわち (1.16) の2つの解 f_n, g_n が得られたとき，その重ね合わせ

$$c_1 f_n + c_2 g_n$$

によって (1.16) の任意の解を表すことができるのか？という疑問に戻ろう．今は，$\prod_{n=n_1}^{n_2-2} q_n \neq 0$ という条件によって，f_n, g_n から作られるカソラチ行列式は恒等的に 0 であるか 0 でないかのどちらかであった．

区間内の適当な点 $m, m+1$ を選び，そこで x_n の初期値 $x_m = a, x_{m+1} = b$ を与えることにする．前に述べた議論により任意の n で解 x_n は一意的に定まる．このとき，もし f_n, g_n の重ね合わせで解を表現できるなら

$$
\begin{aligned}
c_1 f_m + c_2 g_m &= a \\
c_1 f_{m+1} + c_2 g_{m+1} &= b
\end{aligned}
$$

とならなければならない．これを c_1, c_2 に対する連立 1 次方程式とみなし，行列で書き換えると

$$
\begin{pmatrix} f_m & g_m \\ f_{m+1} & g_{m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}
$$

となる．任意の a, b に対して常に解 (c_1, c_2) が存在するためには左辺の行列の行列式（これはカソラチ行列式に等しい）

$$
\det \begin{pmatrix} f_m & g_m \\ f_{m+1} & g_{m+1} \end{pmatrix} = C[f, g]_m
$$

が 0 でないことが必要十分であり，しかも 0 でないときは一意解 (c_1, c_2) が存在する．以上のことより，

> カソラチ行列式が 0 でないような f_n, g_n を探すことができれば，
> その重ね合わせで任意の解を一意的に表すことができる．

という結論が得られた．

1.6　定数係数の 2 階線形同次差分方程式

b, c を定数として次の形の方程式

$$
x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0 \qquad (c \neq 0) \tag{1.18}
$$

を定数係数の**2階線形同次差分方程式**という．この方程式の解を求めるために，新しい変数 y_n を見つけて (1.18) を 1 階線形方程式に帰着させる．このため未定のパラメータ p, q を導入し

$$y_n = x_{n+1} - px_n \tag{1.19}$$

とおき，1 階線形同次方程式を

$$y_{n+1} = qy_n \tag{1.20}$$

とする．(1.20) に (1.19) を代入すると

$$x_{n+2} - px_{n+1} = q(x_{n+1} - px_n)$$

すなわち

$$x_{n+2} - (p+q)x_{n+1} + pqx_n = 0$$

となる．この式と (1.18)

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$

を比べて関係式

$$p + q = -b, \qquad pq = c$$

を得る．この p, q は 2 次方程式

$$x^2 + bx + c = 0$$

の解

$$x = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4c})$$

として与えられる．$c \neq 0$ なので $p \neq 0, q \neq 0$ である．

さて 1 階線形同次方程式 (1.20)

$$y_{n+1} = qy_n, \qquad y_0 = x_1 - px_0$$

の解は

$$y_n = y_0 q^n$$

である．これを (1.19) に代入すると x_n に対する 1 階差分方程式

$$x_{n+1} - px_n = y_0 q^n$$

が得られる．この差分方程式の解は定数変化法 ($x_n = c_n p^n$) を使うと c_n に対する方程式

$$c_{n+1} - c_n = y_0 \frac{q^n}{p^{n+1}}, \qquad c_0 = x_0$$

が得られ，解は

(i) $p \neq q$ のとき

$$c_n = c_0 + \frac{y_0}{p} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k = c_0 + y_0 \frac{1 - (\frac{q}{p})^n}{p - q}$$

(ii) $p = q$ のとき

$$c_n = c_0 + \frac{y_0}{p} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = c_0 + \frac{y_0}{p} n$$

である．したがって (1.18) の解 $x_n = c_n p^n$ は

(i) $p \neq q$ のとき

$$x_n = c_0 p^n + y_0 \frac{p^n - q^n}{p - q}$$

(ii) $p = q$ のとき

$$x_n = \left(c_0 + \frac{y_0}{p} n\right) p^n$$

となる．

初期値 $c_0 = x_0$, $y_0 = x_1 - px_0$ を代入すると最終的に解は次式で与えられる．

(i) $p \neq q$ のとき

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{p-q}[(-qx_0 + x_1)p^n + (px_0 - x_1)q^n] \\ &= \alpha_1 p^n + \alpha_2 q^n \end{aligned}$$

となる．ここで

$$\alpha_1 = \frac{-qx_0 + x_1}{p - q}, \qquad \alpha_2 = \frac{px_0 - x_1}{p - q}$$

である．

(ii)　$p = q$ のとき

$$x_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n)p^n$$

となる．ここで

$$\alpha_1 = x_0, \qquad \alpha_2 = \frac{x_1 - px_0}{p}$$

である．

まとめると定数係数の 2 階線形同次差分方程式

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$

の一般解は，

$$x_n = \begin{cases} \alpha_1 p^n + \alpha_2 q^n & (p \neq q \text{ のとき}) \\ (\alpha_1 + \alpha_2 n)p^n & (p = q \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられる．p, q は b, c で定まる代数方程式

$$x^2 + bx + c = 0 \tag{1.21}$$

の解であり，α_1, α_2 は初期値によって決定される．代数方程式 (1.21) を**特性方程式**という．

判別式 $D = b^2 - 4c < 0$ のとき特性方程式は複素解

$$x = \frac{1}{2}(-b \pm i\sqrt{4c - b^2}) \equiv \lambda_1 \pm i\lambda_2$$

を持つ．このとき基本解 $f_n = (\lambda_1 + i\lambda_2)^n$, $g_n = (\lambda_1 - i\lambda_2)^n$ は複素関数になるが，それらをうまく重ね合わせることにより基本解を実関数に変更できる．まず，複素関数の極表示：

$$\lambda_1 \pm i\lambda_2 = \exp(\rho \pm i\theta), \qquad \exp(\rho) = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \qquad \theta = \arg(\lambda_1 + i\lambda_2)$$

によって上の基本解は

$$f_n = \exp n(\rho + i\theta), \qquad g_n = \exp n(\rho - i\theta)$$

となる．基本解の線形結合から別の基本解を作れる（問 1.8）ことを使うと，新しい基本解

$$f'_n = \frac{1}{2}(f_n + g_n) = e^{n\rho}\cos n\theta,$$
$$g'_n = \frac{1}{2i}(f_n - g_n) = e^{n\rho}\sin n\theta$$

が得られる．この新しい基本解を使うと差分方程式の実数解を求めるのが容易になる．

問 1.9 $n = 0, 1, 2, \ldots$ とする．次の 2 階差分方程式を解け．

(i) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$ （初期値は $x_0 = 2,\ x_1 = 3$）
(ii) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$ （初期値は $x_0 = 1,\ x_1 = 2$）
(iii) $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$ （初期値は $x_0 = 0,\ x_1 = 1$）
(iv) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$ （初期値は $x_0 = 1,\ x_1 = 3$）
(v) $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$ （初期値は $x_0 = 0,\ x_1 = 1$）

1.7 定数係数の 1 階連立差分方程式

2 つの変数 x_n, y_n が相互に関係した次の形の差分方程式

$$x_{n+1} = ax_n + by_n \tag{1.22}$$

$$y_{n+1} = cx_n + dy_n \tag{1.23}$$

を定数係数の **1 階連立線形差分方程式**という．(1.22) から

$$\begin{aligned} x_{n+2} - dx_{n+1} &= ax_{n+1} + by_{n+1} - d(ax_n + by_n) \\ &= ax_{n+1} - adx_n + b(y_{n+1} - dy_n) \end{aligned}$$

が得られ，さらに (1.23) を用いると x_n に対する 2 階線形差分方程式

$$x_{n+2} - (a+d)x_{n+1} + (ad - bc)x_n = 0$$

が得られる．したがって 2 つの変数 x_n, y_n に対する 1 階連立線形差分方程式は x_n に対する 2 階線形差分方程式に等しい．

一般解 x_n は

$$x_n = \begin{cases} c_1p^n + c_2q^n & (p \neq q \text{ のとき}) \\ (c_1 + c_2n)p^n & (p = q \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられる．ここで c_1, c_2 は任意定数で初期値によって決定される．また p, q は特性方程式

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0$$

の 2 つの解である．一方，解 y_n も同様の計算により c_1', c_2' を定数として

$$y_n = \begin{cases} c_1'p^n + c_2'q^n & (p \neq q \text{ のとき}) \\ (c_1' + c_2'n)p^n & (p = q \text{ のとき}) \end{cases} \tag{1.24}$$

となる．

一般解がすでに分かっている方程式を再度研究するのは意味がないように見えるが，(1.22), (1.23) は行列（マトリックス）を使うと

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

と書けるので，解の表現と行列の理論との関係が明らかになる．

式の表現を簡潔にするために，まず列ベクトル $\boldsymbol{X}_n$, 2 行 2 列の単位行列 E と行列 M：

$$\boldsymbol{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を導入する．このとき連立方程式は

$$\boldsymbol{X}_{n+1} = M\boldsymbol{X}_n \tag{1.25}$$

と表される．(1.25) の初期値を $\boldsymbol{X}_0$ とすると解 $\boldsymbol{X}_n$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1 &= M\boldsymbol{X}_0 \\ \boldsymbol{X}_2 &= M\boldsymbol{X}_1 = M^2\boldsymbol{X}_0 \\ \boldsymbol{X}_3 &= M\boldsymbol{X}_2 = M^3\boldsymbol{X}_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

となるので

$$\boldsymbol{X}_n = M^n \boldsymbol{X}_0 \tag{1.26}$$

と形式的に表現される．したがって行列 M の n 乗，すなわち M^n を計算できれば連立方程式の解が求まる．今までは連立方程式を解くために x_n, y_n に注目してきたが，今後は主役が替わって行列 M に注目する．

固有値・固有ベクトル

行列 M と列ベクトル $\boldsymbol{v}$ $(\neq \boldsymbol{0})$ を考える．列ベクトル $\boldsymbol{v}$ が M によって定まる一次変換によって方向を変えずに k 倍（k は定数）となるとき，すなわち

$$M\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{v} \tag{1.27}$$

となるとき k を**固有値**，$\boldsymbol{v}$ を k に対応する**固有ベクトル**という．

注：固有値とか固有ベクトルとかいう抽象的な言葉（概念）に初めて接すると理解するのがとても難しく感じる．初めて外国に住んだ時と同じ状態で，馴れてしまえば何とも感じなくなるのだが，(1.27) は「ある量 $\boldsymbol{v}$ に作用する M があって，作用した結果 $(= M\boldsymbol{v})$ は元の $\boldsymbol{v}$ に比例する $(= k\boldsymbol{v})$」ことを示しているだけで M や $\boldsymbol{v}$ は自由に考えてよい．

たとえばよく知っている微分公式 $\dfrac{d}{dx}\exp kx = k\exp kx$ は固有関数（この場合はベクトルではなく関数）である $\exp kx$ に $\dfrac{d}{dx}$ を作用させると結果は $\exp kx$ の k 倍になると解釈されて，「微分作用素 $\dfrac{d}{dx}$ の固有値 k に対応する固有関数は $\exp kx$ である」という．また公式 $x\dfrac{d}{dx}x^n = nx^n$ は作用素 $x\dfrac{d}{dx}$（これにはオイラー作用素という名前がついている）の固有値 n に対応する固有関数は x^n であると解釈する．

さて (1.27) で k の代りに x を固有値とすると定義より

$$(M - xE)\boldsymbol{v} = 0$$

となり，さらに $\boldsymbol{v} \neq 0$ という条件より

$$\det(M - xE) = 0$$

となる．この式は特性方程式

$$x^2 - (a + d)x + (ad - bc) = 0$$

そのものである．この特性方程式を行列 M の**固有方程式**といい，その解が固有値である．固有値 p, q に対応する方程式を

$$M\boldsymbol{v}_p = p\boldsymbol{v}_p \tag{1.28}$$

$$M\boldsymbol{v}_q = q\boldsymbol{v}_q \tag{1.29}$$

とする．このとき列ベクトル

$$\boldsymbol{v}_p = \begin{pmatrix} v_{p1} \\ v_{p2} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_q = \begin{pmatrix} v_{q1} \\ v_{q2} \end{pmatrix}$$

をそれぞれ固有値 p, q に対応する固有ベクトルという．

では，行列 M の固有ベクトルを計算しよう．その前に固有ベクトルの定数倍も固有ベクトルであることに注意する．したがって v_{p1}, v_{p2} の比だけが問題になる．(1.28) から

$$av_{p1} + bv_{p2} = pv_{p1}$$
$$cv_{p1} + dv_{p2} = pv_{p2}$$

が得られ，

$$(p-a)v_{p1} = bv_{p2}$$
$$cv_{p1} = (p-d)v_{p2}$$

となる．したがって固有ベクトルは

$$\begin{aligned} v_{p1} &= b \\ v_{p2} &= p - a \end{aligned} \tag{1.30}$$

または

$$\begin{aligned} v_{p1} &= p - d \\ v_{p2} &= c \end{aligned} \tag{1.31}$$

のうち，$\boldsymbol{v}_p \neq \boldsymbol{0}$ であるもの（両方であればどちらか）を採用すればよい．どちらも $\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{0}$ の場合 $(a = d = p,\ b = c = 0)$ があるが，ここでは議論を簡明

にするためそのような場合を除外して考える．同様にして (1.29) より固有値 q に対応する固有ベクトルは

$$\begin{aligned} v_{q1} &= b \\ v_{q2} &= q - a \end{aligned} \tag{1.32}$$

または

$$\begin{aligned} v_{q1} &= q - d \\ v_{q2} &= c \end{aligned} \tag{1.33}$$

のうち，$\boldsymbol{v}_q \neq \boldsymbol{0}$ であるものを採用すればよい．

これら固有ベクトルで作った 2 行 2 列の行列を T とする．

$$T \equiv \begin{pmatrix} v_{p1} & v_{q1} \\ v_{p2} & v_{q2} \end{pmatrix}$$

固有値が縮退していない $(p \neq q)$ とき，行列 T には次の性質がある：

(i)　逆行列 T^{-1} が存在する．

T^{-1} が存在する必要十分条件は

$$\det \begin{pmatrix} v_{p1} & v_{q1} \\ v_{p2} & v_{q2} \end{pmatrix} \neq 0$$

である．そこで背理法を用いて

$$\det \begin{pmatrix} v_{p1} & v_{q1} \\ v_{p2} & v_{q2} \end{pmatrix} = 0$$

を仮定すると，$v_{p1}v_{q2} = v_{p2}v_{q1}$ となる．$\boldsymbol{v}_p$, $\boldsymbol{v}_q$ は固有ベクトルであるので $\boldsymbol{v}_p \neq 0$, $\boldsymbol{v}_q \neq 0$ である．たとえば $v_{p1} \neq 0$, $v_{q1} \neq 0$ とし，$\dfrac{v_{p1}}{v_{q1}} = m \ (m \neq 0)$ とおくと，$\dfrac{v_{p2}}{v_{q2}} = m$ となる．したがって $v_{p1} = mv_{q1}$, $v_{p2} = mv_{q2}$ となる．これを

$$M \begin{pmatrix} v_{p1} \\ v_{p2} \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} v_{p1} \\ v_{p2} \end{pmatrix}$$

に代入すると

$$M\begin{pmatrix} mv_{q1} \\ mv_{q2} \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} mv_{q1} \\ mv_{q2} \end{pmatrix}$$

となる．さらに両辺を m で割って

$$M\begin{pmatrix} v_{q1} \\ v_{q2} \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} v_{q1} \\ v_{q2} \end{pmatrix}$$

となる．一方，$\boldsymbol{v}_q$ に対する方程式は

$$M\begin{pmatrix} v_{q1} \\ v_{q2} \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} v_{q1} \\ v_{q2} \end{pmatrix}$$

である．この2つの式より

$$p\begin{pmatrix} v_{q1} \\ v_{q2} \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} v_{q1} \\ v_{q2} \end{pmatrix}$$

となる．$p \neq q$ なので $\begin{pmatrix} v_{q1} \\ v_{q2} \end{pmatrix} = 0$ となる．ところが，$\boldsymbol{v}_q$ は固有ベクトルなので $\boldsymbol{v}_q \neq 0$ でなければならず，この条件に反する．したがって $v_{p1}v_{q2} - v_{p2}v_{q1} \neq 0$ である．証明終わり．

(ii)　次の等式が成立する．

$$MT = T\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

等式の左辺を計算する．

$$MT = M\begin{pmatrix} v_{p1} & v_{q1} \\ v_{p2} & v_{q2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pv_{p1} & qv_{q1} \\ pv_{p2} & qv_{q2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{p1} & v_{q1} \\ v_{p2} & v_{q2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

これは等式の右辺である．証明終わり．

性質 (i), (ii) より次の基本定理が成り立つ．

固有値が縮退していない $(p \neq q)$ とき，行列 M は変換 $T^{-1}MT$ によって対角行列に変換される：

$$\begin{pmatrix} v_{p1} & v_{q1} \\ v_{p2} & v_{q2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{p1} & v_{q1} \\ v_{p2} & v_{q2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

証明は簡単である．(ii) の等式に逆行列 T^{-1}（存在が保証されている）を左より演算すれば基本定理が得られる．

この基本定理を利用して M^n を計算する．対角行列の n 乗は

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix}$$

である．したがって

$$(T^{-1}MT)^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix}$$

となる．また，

$$(T^{-1}MT)^n = T^{-1}MTT^{-1}MT \cdots T^{-1}MT = T^{-1}M^nT$$

であるので，この 2 式より

$$M^n = T \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix} T^{-1} \tag{1.34}$$

を得る．

固有ベクトルとして (1.31), (1.32) を選べるとしよう．すると

$$T = \begin{pmatrix} p-d & b \\ c & q-a \end{pmatrix}$$

となる．一方，特性方程式 $p^2 - (a+d)p + (ad-bc) = 0$ を使うと

$$\det \begin{pmatrix} p-d & b \\ c & q-a \end{pmatrix} = pq - (ap+dq) + ad - bc = (d-p)(p-q)$$

となるので

$$T^{-1} = \frac{1}{(d-p)(p-q)} \begin{pmatrix} q-a & -b \\ -c & p-d \end{pmatrix}$$

である．

これらの結果を (1.34) に代入して，特性方程式から得られる関係式 $bc = (d-p)(a-p)$, $p+q = a+d$ を使って整理すると

$$M^n = \frac{1}{p-q} \begin{pmatrix} (a-q)p^n - (a-p)q^n & b(p^n - q^n) \\ c(p^n - q^n) & (d-q)p^n - (d-p)q^n \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

が得られる．

上の M^n を (1.26) に代入することにより，2元連立差分方程式

$$x_{n+1} = ax_n + by_n$$
$$y_{n+1} = cx_n + dy_n$$

の解は行列を使って次のように表現される（$p \neq q$ のとき）．

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{p-q} \begin{pmatrix} (a-q)p^n - (a-p)q^n & b(p^n - q^n) \\ c(p^n - q^n) & (d-q)p^n - (d-p)q^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$p = q$ のときは固有ベクトルが異なるので別に議論をしなければならないが，結果は上式で極限操作 $q \to p$ をしたものに等しい．すなわち

$$\lim_{q \to p} \frac{p^n - q^n}{p-q} = np^{n-1}$$

を使うと

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} anp^{n-1} - (n-1)p^n & bnp^{n-1} \\ cnp^{n-1} & dnp^{n-1} - (n-1)p^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

である．

注：長い長い議論と計算の結果やっと行列を使って解の表現を求めた．無駄なことをしているように見えるが，この節は行列の基礎理論を理解するためにある．行列の理論は非常に大切である．2元連立ではなく多元連立方程式の解の表現を見通しよくするためには行列の理論が欠かせないし，非線形差分方程式の解法にも必要となる．

問 1.10 E, O をそれぞれ単位行列，零行列とする．2 つの行列 P, Q が

$$P+Q=E, \qquad PQ=O$$

を満たすとき

$$P^2=P, \qquad Q^2=Q, \qquad QP=O$$

が成り立つことを示せ．

問 1.11 与えられた行列 M が適当な定数 c_1, c_2 と前問の P, Q を用いて

$$M=c_1P+c_2Q$$

の形にかけるとき

$$M^n=c_1^nP+c_2^nQ \qquad (n \text{ は自然数})$$

となることを示せ．

問 1.12 $M=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ とする．上記の結果を利用して M^n を求めよ．

ヒント：$P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ とする．

1.8　変数係数の 2 階線形同次差分方程式

p_n, q_n を既知とし，次の形の 2 階線形同次差分方程式を考える．

$$x_{n+2}+p_nx_{n+1}+q_nx_n=0$$

一般的に変数係数の 2 階線形同次差分方程式を解くのは非常に難しい．閉じた形で厳密解が求まるのは差分化されたオイラー (Euler) 方程式 [2] や離散的な特殊関数を記述する差分方程式など係数が特別な場合だけである．一般的な変数係数の場合，行列式による形式解がある [3] がその後の理論的研究はあまり進んでいない．

ここでは 2 階線形同次方程式の 1 つの解が見つかっている場合，もう 1 つの解を求める**階数低下法**について述べる．

階数低下法

既知関数 p_n, q_n は区間 $a \le n \le b$（a, b は整数）で有限とする．同次方程式

$$x_{n+2} + p_n x_{n+1} + q_n x_n = 0 \tag{1.36}$$

の 1 つの解を $x_{1,n}$ とする．c を定数とすると同次方程式だから $cx_{1,n}$ も解である．定数変化法 ($c \to c_n$) を使って新しい解 $x_{2,n}$ ($= c_n x_{1,n}$) を求める．$x_{2,n} = c_n x_{1,n}$ を (1.36) に代入すると

$$c_{n+2}x_{1,n+2} + p_n c_{n+1} x_{1,n+1} + q_n c_n x_{1,n} = 0 \tag{1.37}$$

となる．$x_{1,n}$ は同次方程式の解だから

$$x_{1,n+2} + p_n x_{1,n+1} + q_n x_{1,n} = 0 \tag{1.38}$$

である．(1.38) に c_{n+1} を掛けたものを (1.37) から引き算すると

$$(c_{n+2} - c_{n+1})x_{1,n+2} - q_n(c_{n+1} - c_n)x_{1,n} = 0 \tag{1.39}$$

が得られる．したがって新しい変数 y_n を

$$y_n = c_{n+1} - c_n \tag{1.40}$$

によって導入すると (1.39) より

$$x_{1,n+2}y_{n+1} - q_n x_{1,n} y_n = 0$$

となる．$x_{1,n}$ は既知であるので，この式は y_n に対する 1 階の差分方程式である．解は

$$y_n = y_a \prod_{k=a}^{n-1} \frac{q_k x_{1,k}}{x_{1,k+2}}$$

となる．ただし，$a + 2 \le n \le b$ の範囲で $x_{1,n} \neq 0$ とする．さらに (1.40) より c_n は次の差分方程式

$$c_{n+1} - c_n = y_a \prod_{k=a}^{n-1} \frac{q_k x_{1,k}}{x_{1,k+2}}$$

の解として

$$c_n = c_a + y_a \sum_{j=a}^{n-1} \prod_{k=a}^{j-1} \frac{q_k x_{1,k}}{x_{1,k+2}}$$

で与えられる．したがって新しい解 $x_{2,n}$ は

$$x_{2,n} = c_a x_{1,n} + y_a \Big(\sum_{j=a}^{n-1} \prod_{k=a}^{j-1} \frac{q_k x_{1,k}}{x_{1,k+2}} \Big) x_{1,n}$$

と求められる．

階数低下法の例として次式

$$n(n+1)x_{n+2} - n(2n+5)x_{n+1} + (n+1)(n+3)x_n = 0 \qquad (n \text{ は自然数}) \quad (1.41)$$

を考える．視察により $x_n = n$ が解であることが分かるので，もう 1 つの解を求める．$x_n = nc_n$ とおいて方程式 (1.41) に代入すると

$$n(n+1)(n+2)c_{n+2} - n(2n+5)(n+1)c_{n+1} + (n+1)(n+3)nc_n = 0 \quad (1.42)$$

となる．一方 $x_n = n$ は解であるので

$$c_{n+1}[n(n+1)(n+2) - n(2n+5)(n+1) + (n+1)(n+3)n] = 0 \qquad (1.43)$$

である．(1.42) から (1.43) を引くと，新しい変数 $y_n = c_{n+1} - c_n$ に対する方程式

$$n(n+1)(n+2)y_{n+1} - n(n+1)(n+3)y_n = 0$$

が得られる．$n(n+1)$ で割ると

$$(n+2)y_{n+1} - (n+3)y_n = 0$$

である．解は

$$y_n = y_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+3}{k+2} = y_1 \frac{n+2}{3}$$

となる．したがって c_n に対する方程式 $c_{n+1} - c_n = y_n$ より

$$c_n = c_1 + y_1 \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{n-1} (n+2) = c_1 + y_1 \frac{1}{6}(n^2 + 3n - 4)$$

を得る．$x_n = nc_n$ より新しい解は

$$x_n = c_1 n + y_1 \frac{1}{6} n(n^2 + 3n - 4)$$

で与えられる．

$x_{1,n} = n$ は視察によって求めた基本解であるので，上式で n の比例係数を適当に選ぶと，もう 1 つの基本解は $x_{2,n} = n^2(n+3)$ または

$$x_{2,n} = n^2(n+3) + 2n = n(n+1)(n+2)$$

となる．

解であることをチェックする．$x_{2,n} = n(n+1)(n+2)$ を (1.41) に代入すると

$$\begin{aligned}
&n(n+1)x_{n+2} - n(2n+5)x_{n+1} + (n+1)(n+3)x_n \\
&\quad = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - n(2n+5)(n+1)(n+2)(n+3) \\
&\qquad + (n+1)(n+3)n(n+1)(n+2) \\
&\quad = n(n+1)(n+2)(n+3)[(n+4) - (2n+5) + (n+1)] \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

となり，解であることが確かめられた．

1.9　2 階線形非同次差分方程式

n を整数とし，p_n, q_n, r_n を既知とする．次の形の方程式を **2 階線形非同次差分方程式**という．

$$x_{n+2} + p_n x_{n+1} + q_n x_n = r_n \tag{1.44}$$

この式の右辺の r_n を 0 とおいた同次方程式は

$$x_{n+2} + p_n x_{n+1} + q_n x_n = 0 \tag{1.45}$$

である．たとえば次の方程式

$$x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = \frac{3}{n(n+3)} \qquad (n \text{ は自然数}) \tag{1.46}$$

は 2 階線形非同次差分方程式であり，その同次形は

$$x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0 \qquad (n \text{ は自然数}) \tag{1.47}$$

である．

(1.46) の初期値問題 $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{6}$ の解は逐次代入法を使うと $x_3 = \frac{1}{3 \cdot 4}$, $x_4 = \frac{1}{4 \cdot 5}, \ldots$ となり $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$ と推定できるが，別の初期値問題，たとえば $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ の解を逐次代入法で推定するのは非常に難しい．このとき以下に述べる定理が役に立つ．

定理　同次方程式 (1.45) の独立な 2 つの解を $x_{1,n}$, $x_{2,n}$ とし，非同次方程式 (1.44) の特殊解（または特解）を z_n とする．このとき (1.44) の一般解は

$$x_n = c_1 x_{1,n} + c_2 x_{2,n} + z_n$$

と表される．

その理由は以下の通りである．非同次方程式 (1.44) の 2 つの解を x_n, y_n とすると次式が成立する．

$$x_{n+2} + p_n x_{n+1} + q_n x_n = r_n, \tag{1.48}$$

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = r_n \tag{1.49}$$

解の差 $x_n - y_n$ を u_n とおくと，(1.48) から (1.49) を引いて

$$u_{n+2} + p_n u_{n+1} + q_n u_n = 0$$

となる．これは同次方程式 (1.45) であり一般解は c_1, c_2 を定数として

$$u_n = c_1 x_{1,n} + c_2 x_{2,n} \tag{1.50}$$

と表される．(1.44) の任意の 2 つの解の差は常に (1.50) で表せるので，(1.44) の一般解を得るためにそもそも 2 つの解を求める必要はなく，1 つの解 z_n と同次方程式の一般解 (1.50) を求めれば十分である．以上より一般解は

$$x_n = c_1 x_{1,n} + c_2 x_{2,n} + z_n$$

と表される．すなわち非同次の項は特殊解 z_n が分担し，初期値は係数 c_1, c_2 が分担している．

たとえば非同次方程式 (1.46) の解は同次方程式 (1.47) の一般解 $c_1 \cos\dfrac{2\pi n}{3} + c_2 \sin\dfrac{2\pi n}{3}$ と特殊解 $\dfrac{1}{n(n+1)}$ の和として

$$x_n = c_1 \cos\frac{2\pi n}{3} + c_2 \sin\frac{2\pi n}{3} + \frac{1}{n(n+1)}$$

と表される．たとえば初期値を $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{6}$ とすると $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ となり x_n は特殊解に一致する．しかし初期値を $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{1}{3}$ とすると $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ となり

$$x_n = \cos\frac{2\pi n}{3} + \frac{1}{n(n+1)}$$

と表される．

非同次方程式の特殊解を求める方法は大別して (i) 代入法と (ii) 定数変化法がある．そのほかラプラス変換法の差分化である母関数の方法（簡単な解説は [3] を見よ）もあるが紙数の関係で省略する．

(i) **代入法**：非同次項 r_n の型（たとえば n の多項式，指数関数，三角関数など）によって特殊解の関数形を予想し，方程式に代入して関数形を決める．この方法は簡単に特殊解が見つかるが特別な型の非同次項 r_n でないと関数形の予想が非常に難しい．

(ii) **定数変化法**：これは1階非同次方程式の解を求めたのと同じ方法である．同次方程式の一般解の係数 c_1, c_2 を定数ではなく n の関数と考えて $c_{1,n}$, $c_{2,n}$ に対する差分方程式を導き，この方程式の解として特殊解を求める方法である．この方法は一般の非同次項 r_n に適用できるが，特殊解の表示式は r_n を含んだ不定和分になる．一般にはこの和分が実行できないので特殊解は閉じた形 (closed form) には求まらない．

まず代入法から説明する．

代入法

b, c を定数とし，次の形の2階線形非同次差分方程式を考える．

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = r_n \tag{1.51}$$

この式の右辺の r_n が

1. 多項式：$r_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_k n^k$　　（k は非負の整数）
2. 指数関数：$r_n = a_1 \beta_1^n + a_2 \beta_2^n$

の場合について特殊解を求める．ここで $a_0, a_1, \ldots, a_k, \beta_1, \beta_2$ は定数とする．

注：指数関数 $r_n = a_1\beta_1^n + a_2\beta_2^n$ は $\beta_1 = \beta + i\alpha$, $\beta_2 = \beta - i\alpha$（$\alpha$, β は実数）のとき，$r_n = (a_1 + a_2)\exp(\rho n)\cos(\gamma n) + i(a_1 - a_2)\exp(\rho n)\sin(\gamma n)$ と書き表すことができる．

これらの場合，特殊解の関数形は比較的容易に推定できるが，推定した関数の一部（または全部）が同次方程式

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0 \tag{1.52}$$

の解になっている場合は注意が必要である（関数形を変更する必要がある）．

1. 多項式の場合

未定係数を $A_0, A_1, \ldots, A_k$ として特殊解 z_n を n の多項式

$$z_n = A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \cdots + A_k n^k = \sum_{j=0}^{k} A_j n^j \tag{1.53}$$

であると仮定する．(1.53) を (1.51) に代入すると

$$\sum_{j=0}^{k} A_j (n+2)^j + b\sum_{j=0}^{k} A_j (n+1)^j + c\sum_{j=0}^{k} A_j n^j = \sum_{j=0}^{k} a_j n^j \tag{1.54}$$

が得られる．n のべき乗の係数を 0 とおいて未定係数 $A_0, A_1, \ldots, A_k$ を定める．以下簡単のために $k = 2$ とする．この場合，(1.54) は

$$\begin{aligned} &A_0 + A_1(n+2) + A_2(n+2)^2 + b(A_0 + A_1(n+1) + A_2(n+1)^2) \\ &\quad + c(A_0 + A_1 n + A_2 n^2) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 \end{aligned}$$

であり，未定係数 A_0, A_1, A_2 に対する線形の代数方程式

n^2の係数より：　$A_2(1 + b + c) = a_2$

n^1の係数より：　$A_1(1 + b + c) + 2A_2(2 + b) = a_1$

n^0の係数より：　$A_0(1 + b + c) + A_1(2 + b) + A_2(4 + b) = a_0$

を得る．したがって $1+b+c\neq 0$ のとき

$$A_2=\frac{a_2}{1+b+c},$$
$$A_1=\frac{a_1-2A_2(2+b)}{1+b+c},$$
$$A_0=\frac{a_0-A_1(2+b)-A_2(4+b)}{1+b+c}$$

となって係数 A_0, A_1, A_2 が順次決定され，特殊解 z_n が求まる．

しかし $1+b+c=0$ のときは係数が決まらないので (1.53) の仮定を変更する必要がある．$1+b+c=0$ のとき，定数は同次方程式 (1.52) の解になっている．すると非同次方程式 (1.51) の右辺 r_n は k 次の多項式であるが，左辺 $x_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n$ に k 次の多項式を代入しても $1+b+c=0$ の条件から n^k の係数が 0 となり $k-1$ 次の多項式になるのでうまくいかない．左辺が k 次の多項式になるためには，特殊解 z_n として $k+1$ 次の多項式

$$z_n=n(A_0+A_1n+A_2n^2+\cdots+A_kn^k) \tag{1.55}$$

を考える必要がある．上式から定数項は除いてあるが，定数項は $1+b+c=0$ より同次方程式 (1.52) の解になっているので任意に選べる．

さて $k=2$ のとき，(1.55) を (1.51) に代入すると

$$\begin{aligned}&A_0(n+2)+A_1(n+2)^2+A_2(n+2)^3\\&\qquad+b(A_0(n+1)+A_1(n+1)^2+A_2(n+1)^3)\\&\qquad+c(A_0n+A_1n^2+A_2n^3)\\&=a_0+a_1n+a_2n^2\end{aligned}$$

となり，未定係数 A_0, A_1, A_2 に対する線形の代数方程式

n^3の係数より：　$A_2(1+b+c)=0$

n^2の係数より：　$A_1(1+b+c)+3A_2(2+b)=a_2$

n^1の係数より：　$A_0(1+b+c)+2A_1(2+b)+3A_2(4+b)=a_1$

n^0の係数より：　$A_0(2+b)+A_1(4+b)+A_2(8+b)=a_0$

を得る．したがって $1+b+c=0$ で $2+b\neq 0$ のとき

$$A_2=\frac{a_2}{3(2+b)},$$
$$A_1=\frac{a_1-3A_2(4+b)}{2(2+b)},$$
$$A_0=\frac{a_0-A_1(4+b)-A_2(8+b)}{2+b}$$

となって係数 A_0, A_1, A_2 が順次決定され，特殊解 z_n が求まる．

しかしさらに $1+b+c=0$, $b+2=0$ のとき，すなわち $b=-2$, $c=1$ のときは係数が決まらないので (1.55) の仮定を変更する必要がある．$b=-2$, $c=1$ のとき，定数と 1 次の項 n はともに同次方程式 (1.52) の解になっている．すると非同次方程式 (1.51) の右辺は k 次の多項式であるが，左辺 $x_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n$ に $k+1$ 次の多項式を代入しても $k-1$ 次の多項式になる．左辺が k 次の多項式になるためには，特殊解 z_n として $k+2$ 次の多項式

$$z_n=n^2(A_0+A_1n+A_2n^2+\cdots+A_kn^k) \tag{1.56}$$

を考える必要がある．n^0 と n^1 の項を除いたのは，ともに同次方程式の解になるからである．さて $k=2$ のとき，(1.56) を非同次方程式 (1.51) に代入すると

$$\begin{aligned}&A_0(n+2)^2+A_1(n+2)^3+A_2(n+2)^4\\&\qquad+b(A_0(n+1)^2+A_1(n+1)^3+A_2(n+1)^4)\\&\qquad+c(A_0n^2+A_1n^3+A_2n^4)\\&=a_0+a_1n+a_2n^2\end{aligned}$$

となり，未定係数 A_0, A_1, A_2 に対する線形の代数方程式

n^4の係数より：　$A_2(1+b+c)=0$

n^3の係数より：　$A_1(1+b+c)+4A_2(2+b)=0$

n^2の係数より：　$A_0(1+b+c)+3A_1(2+b)+6A_2(4+b)=a_2$

n^1の係数より：　$2A_0(2+b)+3A_1(4+b)+4A_2(8+b)=a_1$

n^0の係数より：　$A_0(4+b)+A_1(8+b)+A_2(16+b)=a_0$

を得る．したがって $1+b+c=0$ で $2+b=0$ のとき

$$A_2 = \frac{a_2}{6(4+b)},$$
$$A_1 = \frac{a_1 - 4A_2(8+b)}{3(4+b)},$$
$$A_0 = \frac{a_0 - A_1(8+b) - A_2(16+b)}{4+b}$$

となって係数 A_0, A_1, A_2 が順次決定され，特殊解 z_n が求まる．

注：非同次方程式 (1.51) の右辺が 2 次式の場合でもこのように計算が面倒である．一般の k 次多項式ではどのようになるか見通しが立たない．それに左辺の係数 b, c に対する条件 $1+b+c=0$, $2+b=0$ の意味もよく分からない．これらを解決するために前進差分演算子 Δ_{+n} と階乗べき関数 $n^{\underline{k}}$（記号は [3] による）を次のように導入する．

n の任意関数 f_n に対して

$$\Delta_{+n} f_n = f_{n+1} - f_n,$$
$$\Delta_{+n}^2 f_n = \Delta_{+n}(\Delta_{+n} f_n) = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n$$

とし，自然数 k に対して

$$\Delta_{+n} n^{\underline{k}} = k n^{\underline{k-1}}$$

とする．前進差分演算子 Δ_{+n} を使うと (1.51) の左辺は

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = [\Delta_{+n}^2 + (b+2)\Delta_{+n} + (1+b+c)]x_n$$

と表現される．$1+b+c=0$ のとき上式は $[\Delta_{+n} + (b+2)]\Delta_{+n} x_n$ となる．x_n が k 次の多項式のとき差分演算子 Δ_{+n} によって上式は $k-1$ 次の多項式になる．また $1+b+c=0$, $2+b=0$ のとき上式は $\Delta_{+n}^2 x_n$ となり，x_n が k 次の多項式のとき差分演算子 Δ_{+n}^2 によって上式は $k-2$ 次の多項式になる．

さらに特殊解 z_n を $n^{\underline{j}}$ の和 $z_n = \sum_{j=0}^{k} A_j n^{\underline{j}}$ とすると，z_n の差分は簡単に計算できる．たとえば $\Delta_{+n} z_n = \sum_{j=1}^{k} A_j j n^{\underline{j-1}}$ である．詳しい説明は紙数の関係で省略するが，前進差分演算子 Δ_{+n} と階乗べき関数 $n^{\underline{k}}$ を使うと任意の k でも簡単に計算できるようになる．

2. 指数関数の場合

$r_n = a_1\beta_1^n + a_2\beta_2^n$ $(\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0)$ である．未定係数を A_1, A_2 として特殊解 z_n を指数関数の和

$$z_n = A_1\beta_1^n + A_2\beta_2^n \tag{1.57}$$

であると仮定する．(1.57) を非同次方程式 (1.51)

$$z_{n+2} + bz_{n+1} + cz_n = r_n \tag{1.58}$$

に代入すると

$$\begin{aligned} &A_1\beta_1^{n+2} + A_2\beta_2^{n+2} + b(A_1\beta_1^{n+1} + A_2\beta_2^{n+1}) + c(A_1\beta_1^n + A_2\beta_2^n) \\ &\quad = a_1\beta_1^n + a_2\beta_2^n \end{aligned}$$

となり，係数 A_1, A_2 に対する代数方程式

$$\begin{aligned} \beta_1^n \text{の係数より：}\quad A_1(\beta_1^2 + b\beta_1 + c) = a_1, \\ \beta_2^n \text{の係数より：}\quad A_2(\beta_2^2 + b\beta_2 + c) = a_2 \end{aligned}$$

を得る．したがって $\beta_1^2 + b\beta_1 + c \neq 0$ で，かつ $\beta_2^2 + b\beta_2 + c \neq 0$ のとき

$$A_1 = \frac{a_1}{\beta_1^2 + b\beta_1 + c},$$
$$A_2 = \frac{a_2}{\beta_2^2 + b\beta_2 + c}$$

となって係数 A_1, A_2 が決定され，特殊解 z_n が求まる．

しかし $\beta_1^2 + b\beta_1 + c = 0$ または $\beta_2^2 + b\beta_2 + c = 0$ のときは係数が決まらないので (1.57) の仮定を変更する必要がある．たとえば $\beta_1^2 + b\beta_1 + c = 0$, $\beta_2^2 + b\beta_2 + c \neq 0$ の場合を考える．この場合 β_1^n は同次方程式の解になっている．多項式の場合と同じように n を掛けて

$$z_n = A_1 n\beta_1^n + A_2\beta_2^n$$

であると仮定する．この式を (1.58) に代入すると

$$\begin{aligned} &A_1(n+2)\beta_1^{n+2} + A_2\beta_2^{n+2} + b(A_1(n+1)\beta_1^{n+1} + A_2\beta_2^{n+1}) \\ &\quad + c(A_1 n\beta_1^n + A_2\beta_2^n) = a_1\beta_1^n + a_2\beta_2^n \end{aligned}$$

となり，係数 A_1, A_2 に対する代数方程式は

$$n\beta_1^n\text{の係数より：}\quad A_1(\beta_1^2+b\beta_1+c)=0$$
$$\beta_1^n\text{の係数より：}\quad A_1(2\beta_1^2+b\beta_1)=a_1$$
$$\beta_2^n\text{の係数より：}\quad A_2(\beta_2^2+b\beta_2+c)=a_2$$

となる．したがって $\beta_1 \neq 0$（仮定），$2\beta_1+b\neq 0$ のとき

$$A_1=\frac{a_1}{\beta_1(2\beta_1+b)},$$
$$A_2=\frac{a_2}{\beta_2^2+b\beta_2+c}$$

となって係数 A_1, A_2 が決定され，特殊解 z_n が求まる．さらに，$2\beta_1+b=0$ のときは $z_n=A_1n^2\beta_1^n+A_2\beta_2^n$ とおけばよいが省略する．

次に β_1^n と β_2^n がともに同次方程式の解になっている場合，すなわち $\beta_1^2+b\beta_1+c=0,\ \beta_2^2+b\beta_2+c=0$ の場合を考える．全体に n を掛けて

$$z_n=n(A_1\beta_1^n+A_2\beta_2^n)$$

であると仮定する．この式を (1.58) に代入して係数 A_1, A_2 に対する代数方程式

$$n\beta_1^n\text{の係数より：}\quad A_1(\beta_1^2+b\beta_1+c)=0,$$
$$n\beta_2^n\text{の係数より：}\quad A_2(\beta_2^2+b\beta_2+c)=0,$$
$$\beta_1^n\text{の係数より：}\quad A_1(2\beta_1^2+b\beta_1)=a_1,$$
$$\beta_2^n\text{の係数より：}\quad A_2(2\beta_2^2+b\beta_2)=a_2$$

を得る．したがって $2\beta_1+b\neq 0,\ 2\beta_2+b\neq 0$ なら

$$A_1=\frac{a_1}{\beta_1(2\beta_1+b)},$$
$$A_2=\frac{a_2}{\beta_2(2\beta_2+b)}$$

となって係数 A_1, A_2 が決定され，特殊解 z_n が求まる．

定数変化法

2 階線形非同次差分方程式 (1.44)

$$x_{n+2} + p_n x_{n+1} + q_n x_n = r_n \tag{1.59}$$

の特殊解を求める一般的な方法について述べる．ただし同次方程式

$$x_{n+2} + p_n x_{n+1} + q_n x_n = 0 \tag{1.60}$$

の 2 つの線形独立な解 $x_{1,n}$, $x_{2,n}$ は既知とする．同次方程式の一般解 $\hat{x}_n$ は定数係数 c_1, c_2 を使って

$$\hat{x}_n = c_1 x_{1,n} + c_2 x_{2,n}$$

と表される．基本的なアイデアは「(1.60) の解と (1.59) の解の基本的構造は変わらない．変化するのは係数 c_1, c_2 だけである」と仮定することにある．このため解を

$$x_n = c_{1,n} x_{1,n} + c_{2,n} x_{2,n} \tag{1.61}$$

とおき $c_{1,n}$, $c_{2,n}$ を求める．(1.61) を非同次方程式 (1.59) に代入すると

$$\begin{aligned} c_{1,n+2} x_{1,n+2} + c_{2,n+2} x_{2,n+2} + p_n(c_{1,n+1} x_{1,n+1} + c_{2,n+1} x_{2,n+1}) \\ + q_n(c_{1,n} x_{1,n} + c_{2,n} x_{2,n}) = r_n \end{aligned} \tag{1.62}$$

となる．$x_{1,n}$, $x_{2,n}$ は同次方程式の解であるから

$$c_{1,n}(x_{1,n+2} + p_n x_{1,n+1} + q_n x_{1,n}) = 0, \tag{1.63}$$

$$c_{2,n}(x_{2,n+2} + p_n x_{2,n+1} + q_n x_{2,n}) = 0 \tag{1.64}$$

である．(1.62) から (1.63) と (1.64) を引くと

$$\begin{aligned} (c_{1,n+2} - c_{1,n}) x_{1,n+2} + (c_{2,n+2} - c_{2,n}) x_{2,n+2} \\ + p_n(c_{1,n+1} - c_{1,n}) x_{1,n+1} + p_n(c_{2,n+1} - c_{2,n}) x_{2,n+1} = r_n \end{aligned} \tag{1.65}$$

が得られる．

この方程式から未知関数 $c_{1,n}$, $c_{2,n}$ を決める．1 つの方程式に 2 つの未知関数があるので，この方程式をうまく分離して解が求めやすいようにする．p_n の係数に注目して，この係数が 0 になるように選ぶ．

$$(c_{1,n+1} - c_{1,n}) x_{1,n+1} + (c_{2,n+1} - c_{2,n}) x_{2,n+1} = 0 \tag{1.66}$$

これが $c_{1,n}$, $c_{2,n}$ に対する第一の方程式である．(1.65) の残りは

$$(c_{1,n+2}-c_{1,n})x_{1,n+2}+(c_{2,n+2}-c_{2,n})x_{2,n+2}=r_n$$

となる．この式から (1.66) で n を $n+1$ にシフトした式

$$(c_{1,n+2}-c_{1,n+1})x_{1,n+2}+(c_{2,n+2}-c_{2,n+1})x_{2,n+2}=0$$

を引き算すると

$$(c_{1,n+1}-c_{1,n})x_{1,n+2}+(c_{2,n+1}-c_{2,n})x_{2,n+2}=r_n \tag{1.67}$$

が得られる．これが $c_{1,n}$, $c_{2,n}$ に対する第二の方程式である

(1.66), (1.67) は $c_{1,n+1}-c_{1,n}$, $c_{2,n+1}-c_{2,n}$ に対する線形連立方程式であり，解はカソラチ行列式

$$C[x_1,x_2]_n=\det\begin{pmatrix} x_{1,n} & x_{2,n} \\ x_{1,n+1} & x_{2,n+1}\end{pmatrix}$$

を使って

$$\begin{aligned} c_{1,n+1}-c_{1,n} &= -\frac{r_n x_{2,n+1}}{C[x_1,x_2]_{n+1}}, \\ c_{2,n+1}-c_{2,n} &= \frac{r_n x_{1,n+1}}{C[x_1,x_2]_{n+1}} \end{aligned} \tag{1.68}$$

と表される．これらの式の右辺はすべて既知関数であるので，たとえば $c_{1,n0}$, $c_{2,n0}$ を初期値とすると $c_{1,n}$, $c_{2,n}$ は

$$\begin{aligned} c_{1,n} &= c_{1,n0}-\sum_{k=n0+1}^{n}\frac{r_{k-1}x_{2,k}}{C[x_1,x_2]_k} \\ c_{2,n} &= c_{2,n0}+\sum_{k=n0+1}^{n}\frac{r_{k-1}x_{1,k}}{C[x_1,x_2]_k} \end{aligned}$$

となる．この結果を (1.61)

$$x_n=c_{1,n}x_{1,n}+c_{2,n}x_{2,n}$$

に代入して，最終的に非同次方程式 (1.59) の解が

$$x_n=c_{1,n0}x_{1,n}+c_{2,n0}x_{2,n}-\left(\sum_{k=n0+1}^{n}\frac{r_{k-1}x_{2,k}}{C[x_1,x_2]_k}\right)x_{1,n}+\left(\sum_{k=n0+1}^{n}\frac{r_{k-1}x_{1,k}}{C[x_1,x_2]_k}\right)x_{2,n}$$

のように表現される．上式で最初の 2 項 $c_{1,n0}x_{1,n} + c_{2,n0}x_{2,n}$ は同次方程式の解を与えているので特殊解だけを求めるときは無視できる．問題は第 3，第 4 項の和の計算である．一般にこの和を計算して閉じた形で解を求めることは非常に困難である．しかし非同次方程式 (1.59) の解法が (i) 同次方程式の解を求める，(ii) 和の計算をする，の 2 つに分解されたのは非常に大切である．

問 1.13 n を自然数とする．次の 2 階差分方程式の初期値問題を解け．

(i) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2$　（初期値は $x_1 = 2$, $x_2 = 2$）

(ii) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 2n - 1$　（初期値は $x_1 = 1$, $x_2 = 2$）

(iii) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 1$　（初期値は $x_1 = 1$, $x_2 = 3$）

(iv) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 2^n + 3^n$　（初期値は $x_1 = 2$, $x_2 = -1$）

問 1.14 n を整数とし，A, B, θ $(\neq k\pi)$ を定数とする．次の 2 階差分方程式の特殊解を求めよ．

$$x_{n+1} - 2\cos\theta\, x_n + x_{n-1} = A\cos(\theta n) + B\sin(\theta n)$$

章末問題

[1.1]　(i) 次の式を $n=2$ の場合に計算せよ．結果は意外に簡単である．

$$\sum_{j=0}^{n}\prod_{k=0}^{j}\frac{a_{n+1}-a_k}{a_0-a_{k+1}}$$

(ii) 上の式をさらに $n=3$ の場合に計算し，式の構造を観察して一般の n の場合の値を求めよ．

[1.2]　次の数列 x_n の漸化式（または1階差分方程式）を作れ．すなわち p^n を消去して，x_n, x_{n+1} の関係式を求めよ．ただし a, b, c, d, p はすべて正の定数で，$n=0, 1, 2, \ldots$ とする．

(i)　$x_n = \dfrac{a}{1+bp^n}$　（ロジスティック曲線）

(ii)　$x_n = \dfrac{ap^n+b}{cp^n+d}$　（射影変換）

[1.3]　次の数列 x_n の漸化式を作れ．ただし，$k>0$, $a>0$, $b>-1$ であり，$n=0, 1, 2, \ldots$ とする．

$$x_n = ka^{(1+b)^n}\quad（ゴンペルツ曲線）$$

[1.4]　a, b, m を正の定数とし，初期値を $x_0=\dfrac{b}{1+m}$ としたとき，次の差分方程式

$$x_{n+1}-x_n=\frac{a}{b}x_n(b-x_{n+1})$$

の解を求めると

$$x_n=\frac{b}{1+\boxed{}}$$

である．上の空白を埋めよ．

[1.5]　次の差分方程式の解を逐次代入法によって x_0, a_n, b_n で表せ．

$$x_{n+1}=a_nx_n+b_n\qquad(n=0, 1, 2, \ldots)$$

注：n が小さいときの x_n の解を見て，一般の n について x_n を（$\sum$ や $\prod$ を使って）どう表現するかが問題である．

[1.6]　次の差分方程式を解け．

$$x_{n+1}=2x_n+2n-2,\quad x_1=0$$

ヒント：$y_n(=x_{n+1}-x_n)$ に対する方程式を解く．

[1.7]　次の差分方程式を解け.

$$(n+1)x_{n+2}-(3n+2)x_{n+1}+2nx_n=1, \qquad x_1=1, \quad x_2=3$$

注：この方程式は 2 階差分方程式であるが新しい従属変数 y_n を導入すると 1 階差分方程式に帰着できる.

[1.8]　n を整数とする．既知関数 p_n, q_n, r_n は常に有限である．3 階の差分方程式

$$x_{n+3}+p_nx_{n+2}+q_nx_{n+1}+r_nx_n=0$$

の 3 つの解 f_n, g_n, h_n のカソラチ行列式

$$C[f,g,h]_n=\det\begin{pmatrix} f_n & f_{n+1} & f_{n+2} \\ g_n & g_{n+1} & g_{n+2} \\ h_n & h_{n+1} & h_{n+2} \end{pmatrix}$$

が任意の n で定数になるための条件を求めよ.
ヒント：$C[f,g,h]_{n+1}$ と $C[f,g,h]_n$ の関係を調べる.

[1.9]　m, n を整数，k を実数とする．次の 2 階差分方程式

$$x_{n+1}-2\cos k\, x_n+x_{n-1}=0$$

の 2 つの解を $c(kn)$, $s(kn)$ とする．解の一意性を利用して，次の加法定理

$$s(k(m+n))=s(km)c(kn)+c(km)s(kn)$$

を示せ．ただし関数 $c(kn)$, $s(kn)$ の次の基本的性質は既知とする.

(i)　$c(0)=1, \qquad s(0)=0$

(ii)　$c(-x)=c(x), \qquad s(-x)=-s(x)$　　(x は任意の実数)

ヒント：まず $s(k(n+1))=s(kn)c(k)+c(kn)s(k)$ を示す.

[1.10]　n を自然数とする．次の 2 階差分方程式を逐次代入法で解け.

$$x_{n+2}+x_{n+1}+x_n=\frac{3}{n(n+3)} \qquad (\text{初期値は } x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1}{6})$$

[1.11]　n を自然数とする．次の 2 階差分方程式を変数変換法で解け.

$$x_{n+2}-(n+3)x_{n+1}+(n+1)x_n=1 \qquad (\text{初期値は } x_1=0,\ x_2=1)$$

[1.12]　a, b, c, d を定数，n を自然数とする．

(i)　次の連立方程式を考える

$$x_{n+1} = ax_n + by_n$$
$$y_{n+1} = cx_n + dy_n$$

新しい変数 $u_n = \dfrac{x_n}{y_n}$ を導入して u_n に対する非線形差分方程式を導け．

(ii)　(i) の結果を利用して次の非線形差分方程式

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}, \qquad u_0 = 4$$

を解け．

[1.13]　$n \geq 2$ とする．次の変数係数の 2 階線形同次差分方程式

$$n(n+1)x_{n+2} - n(2n+1)x_{n+1} + (n^2 - 1)x_n = 0$$

の 1 つの解は $x_{1,n} = n$ である．階数低下法によってもう 1 つの解を求め，初期値問題 $x_2 = 2$, $x_3 = 2$ を解け．

[1.14]　上の問題を非同次方程式に拡張する．2 階線形非同次方程式

$$n(n+1)x_{n+2} - n(2n+1)x_{n+1} + (n^2 - 1)x_n = 3n(n+1) \qquad (n \geq 2)$$

の一般解を求め，初期値問題 $x_2 = 2$, $x_3 = 7$ を解け．

第2章

再帰方程式

2.1　周期現象と保存量

周期現象を記述するもっとも簡単な 2 階線形常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{2.1}$$

を考える．この方程式の一般解は

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

である．さらに，初期時刻を $t = 0$ として初期値 $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b$ を与えると，解は

$$x(t) = a\cos(\omega t) + \frac{b}{\omega}\sin(\omega t)$$

と定まる．また，この方程式の**保存量**は

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$$

である．保存量とは，初期値によって値が定まり，その値が時刻 t によらず一定であるような量のことをいう．つまり，上記の初期値を定めると H は任意の時刻で $H = (\omega^2 a^2 + b^2)/2$ となる．H が保存していることは H を t で微分すれば確かめられる．

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dx}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x\right) = 0$$

x を横軸，$\dfrac{dx}{dt}$ を縦軸とする平面内で $H(t) =$ 定数（すなわち $(\omega^2 a^2 + b^2)/2$）が表す曲線は楕円となり，解 $x(t)$ はこの楕円の上を**連続的**に動いていく（図 2.1）.

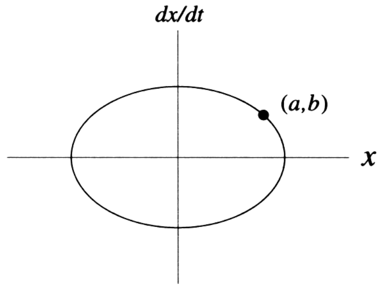


図 2.1　相平面内で $H =$ 定数 が表す曲線

このことは，仮に微分方程式の解 $x(t)$ の詳細な変化が不明の場合でも，保存量が求まると解の大域的性質（全体像）が分かることを意味している．また，適当な時刻 t で $x(t), \dot{x}(t)$ の値を与えれば，それは t における (2.1) の初期値を与えたことに等しく，解が一意的に定まる．すなわち図 2.1 の平面内の 1 点を指定することは解を指定することとほぼ同等であり，t によってその点がどのように動くかは解がどう変化するかを見ていることになる．図 2.1 の平面のことを力学系の用語で**相平面**（phase plane，一般には相空間 phase space）といい，図のように点が動いた軌跡を**解軌道**（trajectory あるいは orbit）という．

このようなことは差分方程式ではどうなるのだろうか？たとえば次のような 2 階線形差分方程式

$$x_{n+1} - x_n + x_{n-1} = 0 \tag{2.2}$$

を考える．一般解は

$$x_n = c_1 \sin(\omega n) + c_2 \cos(\omega n), \quad \omega = \pi/3$$

であり，周期 6 を示す．保存量は

$$H_2(n) = x_n^2 - x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2$$

で与えられる．今の差分の場合の保存量とは n によらず一定の量のことである．$H_2(n)$ が保存量であることは，$H_2(n+1) - H_2(n)$ が 0 であることを示せばよく，以下のようになる．

$$\begin{aligned} &H_2(n+1) - H_2(n) \\ &\quad = x_{n+1}^2 - x_{n+1}x_n + x_n^2 - (x_n^2 - x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2) \\ &\quad = (x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n+1} + x_{n-1} - x_n) \\ &\quad = 0 \end{aligned}$$

横軸を x_{n-1}，縦軸を x_n とする相平面内で $H_2(n) =$ 定数 が表す曲線は楕円となり，解 x_n はこの楕円の上を**飛び飛びに**（離散的に）動いていく（図 2.2）．

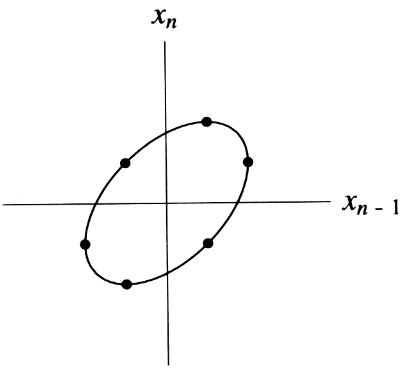


図 2.2　$H_2 =$ 定数 が表す楕円上の解

ところで，差分方程式 (2.2) には $H_2(n)$ の他に，それと独立な保存量 $H_6(n)$ が存在する．

$$H_6(n) = (x_n x_{n-1})^2 (x_n - x_{n-1})^2$$

$H_6(n)$ が保存量であることは，$H_6(n+1) - H_6(n)$ を計算して確かめられる．

$$
\begin{aligned}
&H_6(n+1) - H_6(n) \\
&\quad = (x_{n+1}x_n)^2(x_{n+1}-x_n)^2 - (x_n x_{n-1})^2(x_n - x_{n-1})^2 \\
&\quad = x_n^2(x_{n+1}(x_{n+1}-x_n) - x_{n-1}(x_n - x_{n-1})) \\
&\qquad\quad \times (x_{n+1}-x_{n-1})(x_{n+1}+x_{n-1}-x_n) \\
&\quad = 0
\end{aligned}
$$

保存量 $H_2(n)$ は解 x_n が $H_2(n) =$ 定数 で定まる楕円の上を動くことを示しているが，この新しい保存量 $H_6(n)$ は解 x_n の動きに対してどんな役割を果たしているのだろうか？

実は，$H_2(n) =$ 定数 と $H_6(n) =$ 定数 で定まる曲線の交点の上を解 x_n が離散的に動くのである（図 2.3）．なお，H_2, H_6 の定数値は当然であるが同じ初期値に対して与えなければならない．

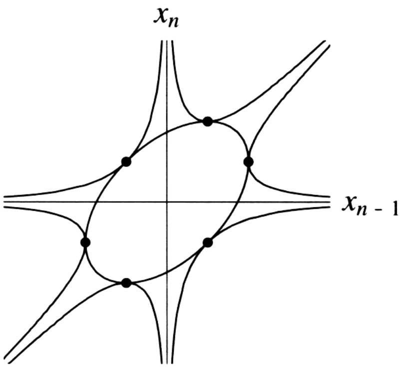


図 2.3　$H_2(n) =$定数 と $H_6(n) =$ 定数 が表す曲線と解の関係

上のような周期現象では，解は相平面内の有限個の点だけを動き，この有限個の点は初期値から一意的に定まる．したがって，これら点を定めるためにもう 1 つの保存量が存在し得るのである．では，この新しい保存量はどうやって求めたらよいのか？このため周期現象を保存量の観点（可積分系の観点）から見直す必要がある．

2.2 再帰現象

次のマッピング（差分方程式）:

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_{n-1}} \qquad (\text{周期 } 5) \qquad (2.3)$$

$$x_{n+2} = \frac{1+x_{n+1}+x_n}{x_{n-1}} \qquad (\text{周期 } 8) \qquad (2.4)$$

はどんな初期値から出発しても一定周期で初期状態に戻る**再帰現象** (recurrence phenomenon) を示す方程式としてよく知られている [8]．実際，式 (2.3) を使ってマッピングを繰り返すと

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_{n-1}},$$

$$x_{n+2} = \frac{1+x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{x_n}\left(1+\frac{1+x_n}{x_{n-1}}\right) = \frac{1+x_{n-1}+x_n}{x_n x_{n-1}},$$

$$x_{n+3} = \frac{1+x_{n+2}}{x_{n+1}} = \frac{x_{n-1}}{1+x_n}\left(1+\frac{1+x_{n-1}+x_n}{x_n x_{n-1}}\right) = \frac{1+x_{n-1}}{x_n},$$

$$x_{n+4} = \frac{1+x_{n+3}}{x_{n+2}} = \frac{x_n x_{n-1}}{1+x_{n-1}+x_n}\left(1+\frac{1+x_{n-1}}{x_n}\right) = \boxed{x_{n-1}},$$

$$x_{n+5} = \frac{1+x_{n+4}}{x_{n+3}} = \frac{x_n}{1+x_{n-1}}(1+x_{n-1}) = \boxed{x_n}$$

となって周期 5 になることが確かめられる．

式 (2.4) は計算が面倒なので数式処理システム (Reduce3.6) による計算結果を示す．

```
% mapping of period 8
operator x;
j0:=8$
on gcd;
for j:=1:j0 do
<<
x(j+2):=(1+x(j+1)+x(j))/x(j-1)$
write x(j+2):=x(j+2);
>>$
           x(2) + x(1) + 1
x(3) := -----------------
                x(0)
```

```
        x(2)*x(0) + x(2) + x(1) + x(0) + 1
x(4) := ------------------------------------
                    x(1)*x(0)

x(5) :=
                                          2
 x(2)*x(1) + x(2)*x(0) + x(2) + x(1)   + x(1)*x(0) + 2*x(1) + x(0) + 1
----------------------------------------------------------------------
                           x(2)*x(1)*x(0)

        x(2)*x(0) + x(2) + x(1) + x(0) + 1
x(6) := ------------------------------------
                    x(2)*x(1)

        x(1) + x(0) + 1
x(7) := -----------------
             x(2)

x(8) := x(0)

x(9) := x(1)

x(10) := x(2)

end;
```

計算結果は周期 8 で初期状態に戻っている．このように任意の初期状態に対して一定周期で再帰する差分方程式を今後**再帰方程式** (recurrence equation) と呼ぶことにする．

2.3　再帰方程式の保存量

再帰方程式の保存量を説明する前に代数学の言葉について触れる．

基本対称式

まず n 個の変数 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ から任意の k $(n \geq k)$ 個を選んで積を作る．全部で $\binom{n}{k}$ 種類できる．次に，それら積すべての和をとる．この和を k 次の**基本対称式**といい，$S_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ で表す．ただし $k = 0$ のとき $S_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$，そして $k < 0$ あるいは $k > n$ のとき $S_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ と定義する．

たとえば4個の変数 x_1, x_2, x_3, x_4 の基本対称式は

$$
\begin{aligned}
&S_{-1}(x_1,x_2,x_3,x_4)=0,\\
&S_0(x_1,x_2,x_3,x_4)=1,\\
&S_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+x_2+x_3+x_4,\\
&S_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4,\\
&S_3(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4,\\
&S_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2x_3x_4,\\
&S_5(x_1,x_2,x_3,x_4)=0
\end{aligned}
$$

であり，5個の変数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 の基本対称式は

$$
\begin{aligned}
S_{-1}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)&=0,\\
S_0(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)&=1,\\
S_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)&=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5,\\
S_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)&=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5\\
&\quad+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5,\\
S_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)&=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_2x_5+x_1x_3x_4+x_1x_3x_5\\
&\quad+x_1x_4x_5+x_2x_3x_4+x_2x_3x_5+x_2x_4x_5+x_3x_4x_5,\\
S_4(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)&=x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3x_5+x_1x_2x_4x_5\\
&\quad+x_1x_3x_4x_5+x_2x_3x_4x_5,\\
S_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)&=x_1x_2x_3x_4x_5,\\
S_6(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)&=0
\end{aligned}
$$

である．

この基本対称式を使うと次の恒等式が得られる．

$$
\prod_{j=1}^{k}(x-x_j)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j S_j(x_1,x_2,\ldots,x_k)x^{k-j} \tag{2.5}
$$

たとえば，$k=4$ のとき上式は

$$
\begin{aligned}
&(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\\
&\quad = x^4 - S_1(x_1,x_2,x_3,x_4)x^3 + S_2(x_1,x_2,x_3,x_k)x^2 - S_3(x_1,x_2,x_3,x_4)x\\
&\qquad + S_4(x_1,x_2,x_3,x_4)\\
&\quad = x^4 - (x_1+x_2+x_3+x_4)x^3 + (x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_3x_4)x^2\\
&\qquad - (x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)x + (x_1x_2x_3x_4)
\end{aligned}
$$

となる．

基本対称式は保存量

N を自然数として，x_n について周期 N の再帰方程式を考察する．つまり，任意の n で $x_{n+N}=x_n$ である．このとき N 個の変数 x_{n+1}, x_{n+2}, $x_{n+3}, \ldots, x_{n+N}$ の基本対称式：

$$
\begin{aligned}
H_1(n) &= x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+N},\\
H_2(n) &= x_{n+1}x_{n+2} + x_{n+1}x_{n+3} + \cdots\\
&\qquad + x_{n+2}x_{n+3} + \cdots + x_{n+N-1}x_{n+N},\\
&\ \ \vdots\\
H_N(n) &= x_{n+1}x_{n+2}\cdots x_{n+N}
\end{aligned}
$$

は再帰方程式の保存量である．証明は簡単で，解の周期性 $x_{n+N}=x_n$ より $H_j(n+1)-H_j(n)=0$ $(1\le j\le N)$ となるからである．

例 1. 線形差分方程式

$$x_{n+1} - x_n + x_{n-1} = 0 \tag{2.6}$$

は周期 6 の再帰方程式であるので保存量は基本対称式で表される．基本対称式は (2.6) を用いて変形することで，x_n と x_{n+1} のみで表現できる．2 次と 6 次の基本対称式を計算すると

$$\begin{aligned}H_2(n) &= x_{n+1}x_{n+2} + x_{n+1}x_{n+3} + \cdots + x_{n+5}x_{n+6} \\ &= -2(x_n^2 - x_n x_{n+1} + x_{n+1}^2), \\ H_6(n) &= x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}x_{n+4}x_{n+5}x_{n+6} \\ &= -(x_n x_{n+1})^2(x_n - x_{n+1})^2\end{aligned}$$

が得られる．

例 2. 周期 5 の再帰方程式

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_{n-1}}$$

では

$$x_{n+2} = \frac{1+x_{n+1}}{x_n}, \quad x_{n+3} = \frac{1+x_n+x_{n+1}}{x_n x_{n+1}}, \quad x_{n+4} = \frac{1+x_n}{x_{n+1}}, \quad x_{n+5} = x_n$$

となるので，保存量は

$$\begin{aligned}H_1(n) &= x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + x_{n+4} + x_{n+5} \\ &= \frac{1 + 2x_n + 2x_{n+1} + x_n^2 + x_{n+1}^2 + x_n^2 x_{n+1} + x_n x_{n+1}^2}{x_n x_{n+1}}, \\ &\ \ \vdots \\ H_5(n) &= x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}x_{n+4}x_{n+5} \\ &= \frac{1 + 2x_n + 2x_{n+1} + x_n^2 + 3x_n x_{n+1} + x_{n+1}^2 + x_n^2 x_{n+1} + x_n x_{n+1}^2}{x_n x_{n+1}}\end{aligned}$$

となり，すべて x_n, x_{n+1} の関数として表現できる．

さらに保存量 $H_j(n)$ $(2 \le j \le N-1)$ はいくつかの保存量の和として表現できる場合がある．たとえば $N=4$ のとき，$H_2(n)$ は以下の保存量 $H_{2,1}(n)$ と $H_{2,2}(n)$ の和となる．

$$H_2(n) = H_{2,1}(n) + H_{2,2}(n)$$

ここで

$$\begin{aligned}H_{2,1}(n) &= x_{n+1}x_{n+2} + x_{n+2}x_{n+3} + x_{n+3}x_{n+4} + x_{n+4}x_{n+1}, \\ H_{2,2}(n) &= x_{n+1}x_{n+3} + x_{n+2}x_{n+4}\end{aligned}$$

である．

$N=5$ のとき $H_2(n)$ と $H_3(n)$ は次のように新しい保存量の和となる．

$$H_2(n) = H_{2,1}(n) + H_{2,2}(n),$$
$$H_3(n) = H_{3,1}(n) + H_{3,2}(n)$$

ここで

$$H_{2,1}(n) = x_{n+1}x_{n+2} + x_{n+2}x_{n+3} + x_{n+3}x_{n+4} + x_{n+4}x_{n+5} + x_{n+5}x_{n+1},$$
$$H_{2,2}(n) = x_{n+1}x_{n+3} + x_{n+2}x_{n+4} + x_{n+3}x_{n+5} + x_{n+4}x_{n+1} + x_{n+5}x_{n+2},$$
$$H_{3,1}(n) = x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3} + x_{n+2}x_{n+3}x_{n+4} + x_{n+3}x_{n+4}x_{n+5} + x_{n+4}x_{n+5}x_{n+1} + x_{n+5}x_{n+1}x_{n+2},$$
$$H_{3,2}(n) = x_{n+1}x_{n+3}x_{n+5} + x_{n+2}x_{n+4}x_{n+1} + x_{n+3}x_{n+5}x_{n+2} + x_{n+4}x_{n+1}x_{n+3} + x_{n+5}x_{n+2}x_{n+4}$$

である．しかしこれらすべての保存量が独立であるとは限らない．なお，保存量の任意関数も保存量になる．

注：保存量の独立性の判定は後で例をあげて議論するが，非常に難しい問題である．将来における重要な研究テーマである．

保存量による解の決定

ある2階の差分方程式を考え，それが周期3の再帰方程式になったとしよう．すると，

$$H_1(n) = x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3}$$
$$H_2(n) = x_{n+1}x_{n+2} + x_{n+1}x_{n+3} + x_{n+2}x_{n+3}$$
$$H_3(n) = x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}$$

はすべて保存量となる．2階の差分方程式を考えているので，それを利用してこれら保存量を x_n と x_{n+1} の関数として与えることができ，初期値（たとえば x_0, x_1）を具体的に数値で与えると，$H_1 \sim H_3$ は数値として決定される．

そこで，仮に $H_1 = 2$, $H_2 = -1$, $H_3 = -2$ となったとしよう．すると，恒等式 (2.5) より

$$\begin{aligned}(x - x_{n+1})(x - x_{n+2})(x - x_{n+3}) &= x^3 - H_1(n)x^2 + H_2(n)x - H_3(n)\\ &= x^3 - 2x^2 - x + 2\end{aligned}$$

となる．上式を 0 とおくと最右辺より根 $x = -1, 1, 2$ が得られる．また，最左辺より $x = x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}$ が得られる．ということは，これだけの情報より解のパターン

$$\{x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}\} = \{-1, 1, 2\}$$

が決定される．すなわち，差分方程式を具体的に与えていないにもかかわらず，周期を決めて保存量 H_j の「数値」だけを与えれば解のパターンを完全に決めることができるのである．

このように面白い性質をもつ再帰方程式はどれくらい存在するのだろうか？よく知られている再帰方程式は文献 [8] にある以下の方程式である．

1 階差分方程式	$x_n = \dfrac{c}{x_{n-1}}$	(周期 2)
2 階差分方程式	$x_n = \dfrac{1 + x_{n-1}}{x_{n-2}}$	(周期 5)
3 階差分方程式	$x_n = \dfrac{1 + x_{n-1} + x_{n-2}}{x_{n-3}}$	(周期 8)
2 階差分方程式	$x_n = \lvert x_{n-1}\rvert - x_{n-2}$	(周期 9)

その他，周期 $k+3$ の k 階差分方程式 ($k \geq 2$) として Conway と Graham による方程式と Lynnes による方程式がある．文献 [8] から受ける印象ではこれ以外に再帰方程式はないように思えるが事実はそうでない．以降の節から列記するのは矢作秀之君（早稲田大学理工学研究科修士 2 年，2001 年当時）がコンピュータを駆使して発見した再帰方程式の例である．

2.4　1 階非線形差分方程式の再帰性

外力項のない 1 階微分方程式の解は連続的に変化し，単調に増大するか，減少するか，または変化しないかのどれかであるので，定数でなければ元の値に再帰することはない．しかし差分方程式では？

周期 2 の 1 階再帰方程式

最も簡単な 1 階再帰方程式は

$$x_{n+1} = \frac{c}{x_n} \qquad (c \text{ は定数})$$

である．解は x_n, $x_{n+1} = c/x_n$, $x_{n+2} = x_n$, $x_{n+3} = c/x_n$ となって周期 2 を示す．

保存量は

$$H_1(n) = x_{n+1} + x_{n+2} = x_n + \frac{c}{x_n},$$

$$H_2(n) = x_{n+1}x_{n+2} = c$$

となるので独立な保存量 $H_1(n)$ が 1 個存在する．

任意周期の 1 階再帰方程式

b を 0 でない定数とし，次の 1 階微分方程式を考える．

$$\frac{du}{dt} = -b(1+u^2) \tag{2.7}$$

解 $u(t)$ は一見周期的で

$$u(t) = -\tan\left(b(t-t_0)\right)$$

となる（図 2.4）．しかし，この方程式を時間発展方程式とみると t が連続であるため解 $u(t)$ が $-\infty$ から $+\infty$ にジャンプすることになり，そこでの連続性や微分可能性が問題となる．

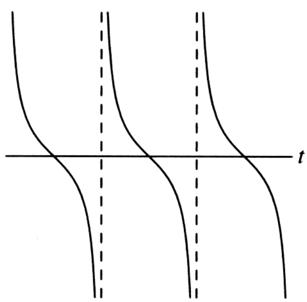


図 2.4　解 $u(t)$ のプロット

では，1 階差分方程式の場合はどうなるだろうか？常識的に考えると再帰はないと考えられるが，事実はそうでない．任意の周期で初期状態に戻る 1 階差分方程式が簡単に作れるのである．δ を時間差分の間隔，n を整数とし，$t = n\delta$ とする．1 階微分方程式 (2.7) の可積分な差分化として次式が得られる（次章 3.2 節「リカッチ方程式の差分化」をみよ）．

$$u_{n+1} - u_n = -\delta b(1 + u_n u_{n+1})$$

これを書き直すと

$$u_{n+1} = \frac{u_n - \delta b}{\delta b u_n + 1}$$

となる．さらに $\delta b = c$, $x_n = cu_n$ とおくと

$$x_{n+1} = \frac{x_n - c^2}{x_n + 1} \tag{2.8}$$

となる．この方程式の解 x_n は，たとえば

$$c = \tan\frac{\pi}{N} \qquad (N > 2)$$

のとき周期 N で初期値に再帰する．例として $N = 4$ すなわち $c = 1$ の場合を確かめてみよう．

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \frac{x_n - 1}{x_n + 1}, \\
x_{n+2} &= \frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1} + 1} = \frac{\frac{x_n - 1}{x_n + 1} - 1}{\frac{x_n - 1}{x_n + 1} + 1} = -\frac{1}{x_n}, \\
x_{n+3} &= \frac{x_{n+2} - 1}{x_{n+2} + 1} = \frac{-\frac{1}{x_n} - 1}{-\frac{1}{x_n} + 1} = \frac{-1 - x_n}{-1 + x_n}, \\
x_{n+4} &= \frac{x_{n+3} - 1}{x_{n+3} + 1} = \frac{\frac{-1 - x_n}{-1 + x_n} - 1}{\frac{-1 - x_n}{-1 + x_n} + 1} = x_n
\end{aligned}$$

確かに周期 4 で初期値に戻っている．

1 階差分方程式の周期性

(2.8) の代りに，一般的な次の 1 階差分方程式（マッピング）

$$x_{n+1} = \frac{a_{11} x_n + a_{12}}{a_{21} x_n + a_{22}} \tag{2.9}$$

の解を考える．ここで a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} は条件 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ を満たす定数である．このマッピングをもう一回繰り返すと

$$x_{n+2}=\frac{a_{11}x_{n+1}+a_{12}}{a_{21}x_{n+1}+a_{22}}=\frac{a_{11}\frac{a_{11}x_n+a_{12}}{a_{21}x_n+a_{22}}+a_{12}}{a_{21}\frac{a_{11}x_n+a_{12}}{a_{21}x_n+a_{22}}+a_{22}}=\frac{(M^2)_{11}x_n+(M^2)_{12}}{(M^2)_{21}x_n+(M^2)_{22}}$$

となる．ここで

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\qquad (M^2)_{ij}=\sum_{k=1,2}a_{ik}a_{kj}\quad (i,\,j=1,\,2)$$

である．マッピングを k 回繰り返すと

$$x_{n+k}=\frac{(M^k)_{11}x_n+(M^k)_{12}}{(M^k)_{21}x_n+(M^k)_{22}}$$

となる．したがって，このマッピングが周期 N を持つためには，$c_0\neq 0$ を任意定数として

$$M^N=c_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

となればよい．

さて，行列 M の 2 つの固有値 p, q が相異なるとしよう．すると第 1 章の (1.35) の結果を用いて

$$M^N=\frac{1}{p-q}\begin{pmatrix} (a_{11}-q)p^N-(a_{11}-p)q^N & a_{12}(p^N-q^N) \\ a_{21}(p^N-q^N) & (a_{22}-q)p^N-(a_{22}-p)q^N\end{pmatrix}$$

となる．したがって解 x_n が周期 N をもつ条件は $p^N=q^N$ であり，固有値の比を

$$\frac{p}{q}=\frac{1+ic}{1-ic}\qquad (c\text{ は実数})$$

とおいて書き直すと

$$c=\tan\frac{k}{N}\pi\qquad (k=1,\,2,\ldots,N-1)$$

となる．行列 M の固有値は

$$p=\frac{1}{2}\Big(a_{11}+a_{22}+\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}\Big),$$
$$q=\frac{1}{2}\Big(a_{11}+a_{22}-\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}\Big)$$

で与えられるので，周期 N をもつ条件は

$$\frac{4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})-(a_{11}+a_{22})^2}{(a_{11}+a_{22})^2}=\tan^2\frac{k}{N}\pi$$

すなわち

$$-4a_{12}a_{21}=(a_{11}-a_{22})^2+(a_{11}+a_{22})^2\tan^2\frac{k}{N}\pi$$

となる．ただし，N と k が互いに素でなければ解の最小の周期は N より小さい N の約数になる．また，$\dfrac{k}{N}=\dfrac{1}{2}$ の場合，すなわち $p^2=q^2$ ($p=-q$, $a_{11}+a_{22}=0$) の場合は除外して考えている．

たとえば，$N=6, k=1$ のとき，$a_{11}=1, a_{22}=2, a_{21}=a$（$a$ は 0 でない任意定数）と選ぶと，$a_{12}=-1/a$ となり，周期 6 をもつ 1 階再帰方程式として

$$x_{n+1}=\frac{x_n-1/a}{ax_n+2}$$

が得られる．

注：1 階差分方程式 (2.9) は射影変換と呼ばれるが，射影変換以外の 1 階差分方程式で再帰方程式になるものがあるかどうかは，現在のところ不明である．

1 階再帰方程式の保存量

周期 4 の再帰性を示す 1 階差分方程式

$$x_{n+1}=\frac{x_n-1}{x_n+1} \tag{2.10}$$

には，前節で述べたように以下のような保存量がある．

$$H_1(n)=x_{n+1}+x_{n+2}+x_{n+3}+x_{n+4},$$

$$H_{2,1}(n)=x_{n+1}x_{n+2}+x_{n+2}x_{n+3}+x_{n+3}x_{n+4}+x_{n+4}x_{n+1},$$

$$H_{2,2}(n)=x_{n+1}x_{n+3}+x_{n+2}x_{n+4},$$

$$H_3(n)=x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}+x_{n+1}x_{n+2}x_{n+4}+x_{n+1}x_{n+3}x_{n+4}+x_{n+2}x_{n+3}x_{n+4},$$

$$H_4(n)=x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}x_{n+4}$$

方程式 (2.10) を使って $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+4}$ を計算した結果：

$$x_{n+1}=\frac{x_n-1}{x_n+1},\qquad x_{n+2}=-\frac{1}{x_n},$$

$$x_{n+3}=-\frac{x_n+1}{x_n-1},\qquad x_{n+4}=x_n$$

を保存量に代入すると

$$
\begin{aligned}
H_1(n) &= \frac{(x_n^2+2x_n-1)(x_n^2-2x_n-1)}{(x_n+1)(x_n-1)x_n},\\
H_{2,1}(n) &= -4,\\
H_{2,2}(n) &= -2,\\
H_3(n) &= -H_1(n),\\
H_4(n) &= 1
\end{aligned}
$$

となる．したがって独立な保存量は $H_1(n)$ だけである．方程式 (2.10) の解 x_n は $H_1(n)=$ 定数 で定まる点の上を移動する（図 2.5）．

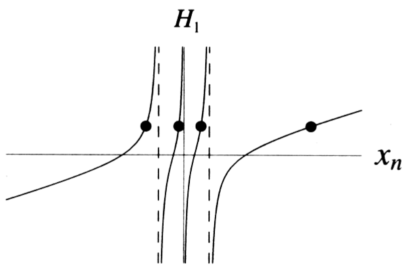


図 2.5　H_1 のプロット．4 つの点は解 x_n の例を示す．

2.5　2 階非線形差分方程式の再帰性

QRT 系：可積分な 2 階差分方程式

可積分な（保存量をもつ）2 階差分方程式の一般的な形式として**キスペル–ロバート–トンプソン系**（Quispel-Robert-Thompson 系，QRT 系）

$$x_{n+1} = \frac{f_1(x_n) - x_{n-1}f_2(x_n)}{f_2(x_n) - x_{n-1}f_3(x_n)} \tag{2.11}$$

が知られている [9]．ここで $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ はベクトルの外積を使って

$$\boldsymbol{f}(x) = (M_a\boldsymbol{X}) \times (M_b\boldsymbol{X})$$

と表現される．ただし $\boldsymbol{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$，$\boldsymbol{X} = (x^2, x, 1)^T$ であり，M_a, M_b は任意パラメータよりなる 3 行 3 列の対称行列である．詳しく書くと

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．ここでパラメータの間には関係式 $a_{jk} = a_{kj}$, $b_{jk} = b_{kj}$ $(j,\ k = 1,\ 2,\ 3)$ がある．

$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ を具体的に書き表すと

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (a_{21}x^2 + a_{22}x + a_{23})(b_{31}x^2 + b_{32}x + b_{33}) \\ &\qquad - (a_{31}x^2 + a_{32}x + a_{33})(b_{21}x^2 + b_{22}x + b_{23}), \\ f_2(x) &= (a_{31}x^2 + a_{32}x + a_{33})(b_{11}x^2 + b_{12}x + b_{13}) \\ &\qquad - (a_{11}x^2 + a_{12}x + a_{13})(b_{31}x^2 + b_{32}x + b_{33}), \\ f_3(x) &= (a_{11}x^2 + a_{12}x + a_{13})(b_{21}x^2 + b_{22}x + b_{23}) \\ &\qquad - (a_{21}x^2 + a_{22}x + a_{23})(b_{11}x^2 + b_{12}x + b_{13}) \end{aligned}$$

のようになる．保存量 H は，$x = x_{n-1}$, $y = x_n$ と書くことにして

$$H = \frac{N}{D} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} N &= a_{11}x^2y^2 + a_{12}x^2y + a_{13}x^2 + a_{21}xy^2 + a_{22}xy + a_{23}x \\ &\qquad + a_{31}y^2 + a_{32}y + a_{33}, \\ D &= b_{11}x^2y^2 + b_{12}x^2y + b_{13}x^2 + b_{21}xy^2 + b_{22}xy + b_{23}x \\ &\qquad + b_{31}y^2 + b_{32}y + b_{33} \end{aligned}$$

と表現される．QRT 系はパラメータの選び方によって周期 3, 4, 5, 6 の再帰方程式になる

2 階差分方程式の再帰性

2 階差分方程式の再帰性を調べるために，QRT 系にならって次式

$$x_{n+1} = \frac{a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 - x_{n-1}(b_0 + b_1x_n + b_2x_n^2)}{b_0 + b_1x_n + b_2x_n^2 - x_{n-1}(c_0 + c_1x_n + c_2x_n^2)} \tag{2.13}$$

を仮定し，この仮定の範囲で再帰方程式を探す．さらに係数 $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$ の値を $-1, 0, 1$ の 3 種に絞り，係数のすべての組合せについて (2.13) に再帰性があるかどうかを調べる．計算機の出力結果を分析し，整理して得られた再帰方程式を以下に示す．

2 階再帰方程式（周期 3）

(2.13) の形の方程式うち周期 3 をもつものは次式の形にまとめられる．

$$x_{n+1} = -\frac{a_0 + a_1 x_n + x_{n-1}(a_1 + a_2 x_n)}{a_1 + a_2 x_n + x_{n-1}(a_2 + a_3 x_n)} \tag{2.14}$$

この式は QRT 系に変換できる．QRT 系の行列 M_a, M_b をたとえば

$$M_a = \begin{pmatrix} -a_2 a_3 & 0 & a_1 a_2 \\ 0 & -a_0 a_3 + a_1 a_2 & 0 \\ a_1 a_2 & 0 & -a_0 a_1 \end{pmatrix}, \qquad M_b = \begin{pmatrix} a_2^2 & a_1 a_2 & 0 \\ a_1 a_2 & a_0 a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると (2.14) が得られる．このとき (2.14) の保存量は (2.12) より

$$H_{QRT}(n) = \frac{x_{n-1}^2(-a_2 a_3 x_n^2 + a_1 a_2) + x_{n-1}(-a_0 a_3 + a_1 a_2)x_n + a_1 a_2 x_n^2 - a_0 a_1}{x_{n-1}^2(a_2^2 x_n^2 + a_1 a_2 x_n) + x_{n-1}(a_1 a_2 x_n^2 + a_0 a_2 x_n)}$$

と表される．

一方，(2.14) は周期が 3 なので次の 3 個の基本対称式

$$\begin{aligned} H_1(n) &= x_{n-1} + x_n + x_{n+1} \\ &= \frac{a_3 x_{n-1} x_n (x_{n-1} + x_n) + a_2(x_{n-1}^2 + x_{n-1} x_n + x_n^2) - a_0}{a_3 x_{n-1} x_n + a_2(x_{n-1} + x_n) + a_1}, \\ H_2(n) &= x_{n-1} x_n + x_n x_{n+1} + x_{n-1} x_{n+1} \\ &= \frac{a_3 x_{n-1}^2 x_n^2 - a_1(x_{n-1}^2 + x_{n-1} x_n + x_n^2) - a_0(x_{n-1} + x_n)}{a_3 x_{n-1} x_n + a_2(x_{n-1} + x_n) + a_1}, \\ H_3(n) &= x_{n-1} x_n x_{n+1} \\ &= -\frac{x_{n-1} x_n (a_2 x_{n-1} x_n + a_1(x_{n-1} + x_n) + a_0)}{a_3 x_{n-1} x_n + a_2(x_{n-1} + x_n) + a_1} \end{aligned}$$

が保存量になる．一見するとこれら 4 個の保存量 $H_1(n)$, $H_2(n)$, $H_3(n)$, $H_{QRT}(n)$ は独立にみえるが実はそうでない．この中の 2 個が独立で，残り

はそれらを用いて表される.

$$a_0 + a_1 H_1(n) + a_2 H_2(n) + a_3 H_3(n) = 0,$$
$$H_{QRT}(n) = -\frac{a_3}{a_2}\,\frac{a_0 + a_2 H_2(n)}{a_0 + a_1 H_1(n) + a_2 H_2(n)}$$

注：付録 C で 2 階差分方程式を QRT 系に変換する方法を説明する.

2 階再帰方程式（周期 4）

方程式 (2.13)，すなわち

$$x_{n+1} = \frac{a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 - x_{n-1}(b_0 + b_1 x_n + b_2 x_n^2)}{b_0 + b_1 x_n + b_2 x_n^2 - x_{n-1}(c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2)} \tag{2.15}$$

の中で，QRT 系に属し周期 4 をもつ方程式は次の条件を満たすものである.

$$c_2 \neq 0,$$
$$a_0 = (b_1 + a_2)(b_1 + c_0)/c_2, \qquad a_1 = -c_1(b_1 + c_0)/c_2,$$
$$b_0 = -b_2(b_1 + a_2)/c_2, \qquad c_0 = -(a_2 c_2 + b_2 c_1)/c_2$$

$c_2 = 0$ である方程式は射影変換，たとえば $x_n \to x_n/(1 + x_n)$ によって $c_2 \neq 0$ を満たすようにする.

注：計算機によって得られた周期 4 の 2 階再帰方程式は 11 個あったが，これらを 1 つにまとめて得られたものが (2.15) である.

周期 4 の再帰方程式の保存量を調べる．一般式では複雑になるので，例として (2.15) で $b_1 = -a_2$, $c_1 = 0$ と簡単化して得られる次式を取り上げる.

$$x_{n+1} = \frac{a_2 x_n^2 - x_{n-1}(-a_2 x_n + b_2 x_n^2)}{-a_2 x_n + b_2 x_n^2 - x_{n-1}(-a_2 + c_2 x_n^2)} \tag{2.16}$$

周期が 4 なので次の 5 つの保存量がある.

$$\begin{aligned}
H_1(n) &= x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + x_{n+4},\\
H_{2,1}(n) &= x_{n+1}x_{n+2} + x_{n+2}x_{n+3} + x_{n+3}x_{n+4} + x_{n+4}x_{n+1},\\
H_{2,2}(n) &= x_{n+1}x_{n+3} + x_{n+2}x_{n+4},\\
H_3(n) &= x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3} + x_{n+1}x_{n+2}x_{n+4}\\
&\qquad + x_{n+1}x_{n+3}x_{n+4} + x_{n+2}x_{n+3}x_{n+4},\\
H_4(n) &= x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}x_{n+4}
\end{aligned}$$

(2.16) により $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+4}$ を計算して代入すると，これらの保存量は多項式 $g_1(x_{n-1}, x_n)$，$g_2(x_{n-1}, x_n)$，$g_3(x_{n-1}, x_n)$，$g_4(x_{n-1}, x_n)$，$g_5(x_{n-1}, x_n)$ を導入して次式のように表現できることがわかる．

$$H_1(n) = \frac{g_1(x_{n-1}, x_n)g_2(x_{n-1}, x_n)}{g_3(x_{n-1}, x_n)g_4(x_{n-1}, x_n)},$$

$$H_{2,1}(n) = \frac{g_1(x_{n-1}, x_n)^2}{g_3(x_{n-1}, x_n)g_4(x_{n-1}, x_n)}, \qquad H_{2,2}(n) = \frac{g_2(x_{n-1}, x_n)g_5(x_{n-1}, x_n)}{g_3(x_{n-1}, x_n)g_4(x_{n-1}, x_n)},$$

$$H_3(n) = \frac{2g_1(x_{n-1}, x_n)g_5(x_{n-1}, x_n)}{g_3(x_{n-1}, x_n)g_4(x_{n-1}, x_n)}, \qquad H_4(n) = \frac{g_5(x_{n-1}, x_n)^2}{g_3(x_{n-1}, x_n)g_4(x_{n-1}, x_n)}$$

ここで

$$\begin{aligned}
g_1(x_{n-1}, x_n) &= c_2x_n^2x_{n-1}^2 - a_2x_n^2 - a_2x_{n-1}^2,\\
g_2(x_{n-1}, x_n) &= c_2x_n^2x_{n-1} - b_2x_n^2 + c_2x_nx_{n-1}^2 - b_2x_{n-1}^2,\\
g_3(x_{n-1}, x_n) &= c_2x_n^2x_{n-1} - b_2x_n^2 + a_2x_n - a_2x_{n-1},\\
g_4(x_{n-1}, x_n) &= c_2x_nx_{n-1}^2 - a_2x_n - b_2x_{n-1}^2 + a_2x_{n-1},\\
g_5(x_{n-1}, x_n) &= x_nx_{n-1}(b_2x_nx_{n-1} - a_2x_n - a_2x_{n-1})
\end{aligned}$$

である．

さらに式 (2.16) は次のような QRT 形式に変換される．

$$M_a = \begin{pmatrix} -(a_{12}b_2 + a_{13}c_2)/a_2 & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & 0 & 0\\ a_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_b = \begin{pmatrix} -(b_{12}b_2 + b_{13}c_2)/a_2 & b_{12} & b_{13}\\ b_{12} & 0 & 0\\ b_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで a_{12}, a_{13}, b_{12}, b_{13} は任意のパラメータである．この形式より得られる保存量として

$$H_{QRT}(n)$$
$$= \frac{a_{12}[a_2(x_{n-1}^2 x_n + x_{n-1}x_n^2) - b_2 x_{n-1}^2 x_n^2] + a_{13}[a_2(x_{n-1}^2 + x_n^2) - c_2 x_{n-1}^2 x_n^2]}{b_{12}[a_2(x_{n-1}^2 x_n + x_{n-1}x_n^2) - b_2 x_{n-1}^2 x_n^2] + b_{13}[a_2(x_{n-1}^2 + x_n^2) - c_2 x_{n-1}^2 x_n^2]}$$

がある．以上の 6 個の保存量 $H_1(n)$, $H_{21}(n)$, $H_{22}(n)$, $H_3(n)$, $H_4(n)$, $H_{QRT}(n)$ の間にはどのような関数関係があるのだろうか？実は，$H_1(n)$ と次式で定義される保存量 $H_0(n)$ が基本的なもので，他の保存量はすべて $H_1(n)$ と $H_0(n)$ を使って表現される．

$$H_0(n) = H_1(n)/H_{2,1}(n)$$

表現を簡潔にするために $H_0(n)$ に従属な保存量 $H_5(n)$ を導入する:

$$H_5(n) = (b_2 - a_2 H_0(n))/c_2$$

このとき次の関係式がある．

$$H_{2,1}(n) = H_1(n)/H_0(n), \qquad H_{2,2}(n) = H_5(n)H_1(n),$$
$$H_3(n) = 2H_5(n)H_1(n)/H_0(n), \qquad H_4(n) = H_5(n)^2 H_1(n)/H_0(n),$$
$$H_{QRT}(n) = \frac{a_{12}H_5(n) + a_{13}}{b_{12}H_5(n) + b_{13}}$$

2 階再帰方程式（周期 5）

(2.13) の中で，周期 5 の 2 階非線形差分方程式は次式

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{x_{n-1}} \tag{2.17}$$

に統一される．前に再帰現象の説明のために例として使った方程式である．

注：計算機の出力結果を整理すると 15 個の方程式が得られるが，これらはすべて (2.17) に変換される．この式は QRT 系でパラメータを次のように選ぶと得られる．

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & a_{33} & a_{33} \\ a_{33} & a_{22} & 2a_{33} \\ a_{33} & 2a_{33} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad M_b = \begin{pmatrix} 0 & b_{33} & b_{33} \\ b_{33} & b_{22} & 2b_{33} \\ b_{33} & 2b_{33} & b_{33} \end{pmatrix}$$

ここで a_{22}, a_{33}, b_{22}, b_{33} は任意パラメータである．

注：方程式 (2.17) は一般的な k 階差分方程式 B 型（周期 $k+3$）の特別な場合 ($k=2$) である [1].

周期 5 の再帰方程式 (2.17) の保存量は

$$\begin{aligned} H_1(n) &= x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + x_{n+4} + x_{n+5} \\ &= (x_{n-1}^2 x_n + x_{n-1}x_n^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2 + 2x_{n-1} + 2x_n + 1) \\ &\quad /(x_{n-1}x_n), \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} H_{2,1}(n) &= x_{n+1}x_{n+2} + x_{n+2}x_{n+3} + x_{n+3}x_{n+4} + x_{n+4}x_{n+5} + x_{n+5}x_{n+1} \\ &= (x_{n-1}^3 x_n^3 + x_{n-1}^4 x_n + x_{n-1}x_n^4 + x_{n-1}^3 x_n + x_{n-1}x_n^3 + x_{n-1}^3 \\ &+ x_{n-1}^2 x_n + x_{n-1}x_n^2 + x_n^3 + 2x_{n-1}^2 + 2x_{n-1}x_n + 2x_n^2 + x_{n-1} + x_n) \\ &\quad /(x_{n-1}^2 x_n^2), \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} H_{2,2}(n) &= x_{n+1}x_{n+3} + x_{n+2}x_{n+4} + x_{n+3}x_{n+5} + x_{n+4}x_{n+1} + x_{n+5}x_{n+2} \\ &= (x_{n-1}^2 x_n + x_{n-1}x_n^2 + x_{n-1}^2 + 5x_{n-1}x_n + x_n^2 + 2x_{n-1} + 2x_n + 1) \\ &\quad /(x_{n-1}x_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{3,1}(n) &= x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3} + x_{n+2}x_{n+3}x_{n+4} + x_{n+3}x_{n+4}x_{n+5} \\ &\quad + x_{n+4}x_{n+5}x_{n+1} + x_{n+5}x_{n+1}x_{n+2} \\ &= (x_{n-1}^4 x_n^2 + x_{n-1}^2 x_n^4 + x_{n-1}^3 x_n^2 + x_{n-1}^2 x_n^3 + x_{n-1}^4 + x_{n-1}^3 x_n \\ &\quad + x_{n-1}x_n^3 + x_n^4 + 2x_{n-1}^3 + 2x_{n-1}^2 x_n + 2x_{n-1}x_n^2 + 2x_n^3 + 2x_{n-1}^2 \\ &\quad + 3x_{n-1}x_n + 2x_n^2 + 2x_{n-1} + 2x_n + 1)/(x_{n-1}^2 x_n^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{3,2}(n) &= x_{n+1}x_{n+3}x_{n+5} + x_{n+2}x_{n+4}x_{n+1} + x_{n+3}x_{n+5}x_{n+2} \\ &\quad + x_{n+4}x_{n+1}x_{n+3} + x_{n+5}x_{n+2}x_{n+4} \\ &= (2x_{n-1}^2 x_n + 2x_{n-1}x_n^2 + 2x_{n-1}^2 + 5x_{n-1}x_n + 2x_n^2 \\ &\quad + 4x_{n-1} + 4x_n + 2)/(x_{n-1}x_n), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H_4(n) &= x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}x_{n+4} + x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}x_{n+5} + x_{n+1}x_{n+2}x_{n+4}x_{n+5} \\
&\quad + x_{n+1}x_{n+3}x_{n+4}x_{n+5} + x_{n+2}x_{n+3}x_{n+4}x_{n+5} \\
&= (x_{n-1}^3x_n^3 + x_{n-1}^4x_n + 2x_{n-1}^3x_n^2 + 2x_{n-1}^2x_n^3 + x_{n-1}x_n^4 \\
&\quad + 3x_{n-1}^3x_n + 5x_{n-1}^2x_n^2 + 3x_{n-1}x_n^3 + x_{n-1}^3 + 5x_{n-1}^2x_n + 5x_{n-1}x_n^2 \\
&\quad + x_n^3 + 2x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}x_n + 2x_n^2 + x_{n-1} + x_n)/(x_{n-1}^2x_n^2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_5(n) &= x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}x_{n+4}x_{n+5} \\
&= (x_{n-1}^2x_n + x_{n-1}x_n^2 + x_{n-1}^2 + 3x_{n-1}x_n + x_n^2 + 2x_{n-1} + 2x_n + 1) \\
&\quad /(x_{n-1}x_n),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{QRT}(n) = (&a_{22}x_{n-1}x_n \\
&+ a_{33}(x_{n-1}^2x_n + x_{n-1}x_n^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2 + 2x_{n-1} + 2x_n + 1)) \\
/(&b_{22}x_{n-1}x_n \\
&+ b_{33}(x_{n-1}^2x_n + x_{n-1}x_n^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2 + 2x_{n-1} + 2x_n + 1))
\end{aligned}
$$

の 8 個である．この中で $H_1(n)$ と $H_{2,1}(n)$ の 2 つが独立で，他の保存量はこの 2 つで生成できる．

$$
\begin{aligned}
H_{2,2}(n) &= H_1(n) + 5, \\
H_{3,1}(n) &= -H_1(n) + H_1(n)^2 - 2H_{2,1}(n) - 10, \\
H_{3,2}(n) &= 2H_1(n) + 5, \\
H_4(n) &= 2H_1(n) + H_{2,1}(n) + 5, \\
H_5(n) &= H_1(n) + 3, \\
H_{QRT}(n) &= \frac{a_{22} + a_{33}H_1(n)}{b_{22} + b_{33}H_1(n)}
\end{aligned}
$$

2 階再帰方程式（周期 6）

方程式 (2.13) の中で，QRT 系に含まれる周期 6 の再帰方程式は次の 2 式にまとめられる．

■ 積分 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx$ の値は？（その 1）

数式処理システム *Mathematica* の古いバージョンによると，定積分の値が

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = -2$$

と出力される．正値関数を積分すると負になるという奇妙な結果である．これは原始関数 $-1/x$ に積分の上限 1 と下限 -1 を機械的に代入した結果だと推定される．

今のバージョンでは

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \infty$$

となっていた．これは原始関数が $x = 0$ で発散するので無限大としたのであろうと推定される．この積分の値はどちらが正しいのだろうか？

$$x_{n+1} = \frac{a_0 + a_1 x_n + a_2 x_{n-1} x_n}{-a_2 x_n + a_2 x_{n-1}}, \tag{2.20}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_n^2 - x_{n-1}(1 + x_n^2)}{1 + x_n^2 - x_{n-1}(1 + x_n)} \tag{2.21}$$

この 2 式は QRT 系のパラメータをそれぞれ次のように選ぶと得られる．(2.20) については

$$M_a = \begin{pmatrix} a_{11} & \dfrac{a_{11}a_1}{a_2} & a_{13} \\ \dfrac{a_{11}a_1}{a_2} & \dfrac{a_{11}(a_0 a_2 + a_1^2) - a_{13}a_2^2}{a_2^2} & \dfrac{a_{11}a_0 a_1 + a_{13}a_1 a_2}{2a_2^2} \\ a_{13} & \dfrac{a_{11}a_0 a_1 + a_{13}a_1 a_2}{2a_2^2} & \dfrac{a_{13}a_0}{a_2} \end{pmatrix},$$

$$M_b = \begin{pmatrix} b_{11} & \dfrac{b_{11}a_1}{a_2} & b_{13} \\ \dfrac{b_{11}a_1}{a_2} & \dfrac{b_{11}(a_0 a_2 + a_1^2) - b_{13}a_2^2}{a_2^2} & \dfrac{b_{11}a_0 a_1 + b_{13}a_1 a_2}{2a_2^2} \\ b_{13} & \dfrac{b_{11}a_0 a_1 + b_{13}a_1 a_2}{2a_2^2} & \dfrac{b_{13}a_0}{a_2} \end{pmatrix}$$

と選び，(2.21) については

$$M_a = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{11} & a_{11}-a_{23} \\ -a_{11} & -a_{11}+a_{23} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & -a_{23} \end{pmatrix},$$

$$M_b = \begin{pmatrix} b_{11} & -b_{11} & b_{11}-b_{23} \\ -b_{11} & -b_{11}+b_{23} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & -b_{23} \end{pmatrix}$$

と選ぶ．ここで $a_{11}, a_{13}, a_{23}, b_{11}, b_{13}, b_{23}$ は任意のパラメータである．

注：差分方程式 (2.20), (2.21) の保存量 H_{QRT} は簡単に求まるが，これと独立な保存量はまだ調べられていない．卒論・修論のテーマとして適当だと思うが難しいか易しいかも分かっていない．

(2.20) から射影変換とパラメータの選び方によって次のような方程式が導かれる．

(i)　変換 $x_n = -\dfrac{1+y_n}{y_n}$, $a_0 = b_2 - b_3 - b_1$, $a_1 = -2b_1 + b_2$, $a_2 = -b_1$

$$y_{n+1} = \frac{-b_1 y_{n-1} + b_1 y_n}{b_1 + b_2 y_{n-1} + b_3 y_{n-1} y_n}$$

(ii)　変換 $x_n = \dfrac{y_n}{1-y_n}$, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_0 + b_1$, $a_2 = b_0 + b_1$

$$y_{n+1} = \frac{-b_0 - b_1 y_n - y_{n-1}(-b_0 + b_0 y_n)}{-b_0 + b_0 y_n - y_{n-1}(b_1 + b_0 y_n)} \tag{2.22}$$

(iii)　変換 $x_n = 1 + y_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$

$$y_{n+1} = \frac{1 + y_n + y_{n-1} y_n}{y_{n-1} - y_n}$$

(2.13) の中で，QRT 系に含まれない周期 6 の再帰方程式は次の 3 式にまとめられる:

$$x_{n+1} = \frac{a_0 + a_1 x_n - x_{n-1}(-a_2 x_n^2)}{-a_2 x_n^2 - x_{n-1}(-a_2 x_n)},$$
$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n - x_{n-1}(1 + x_n^2)}{1 + x_n^2 - x_{n-1}(x_n + x_n^2)},$$
$$x_{n+1} = \frac{1 - x_n^2 - x_{n-1}}{1 - x_{n-1}(1 + x_n)}$$

注：QRT 系に含まれない差分方程式と述べたが，これは数式処理 Reduce を使って計算した結果 QRT 系に変換できなかったという意味で，数学的に証明されているわけではない．数式処理の solve 機能にエラーがあれば間違った結果をあたえる．

注：(2.22) は一般的な k 階差分方程式 B 型（周期 $2k+2$）の特別な場合 ($k=2$) である [1].

時間反転に対して不変でない 2 階再帰方程式（周期 6）

今までは時間反転（添え字 $n+1$ と $n-1$ の入れ替え）によって不変な 2 階差分方程式を調べてきたが，この条件を満たさない再帰方程式（周期 6）として

$$x_{n+1} = \frac{x_n - x_{n-1}(1 + x_n)}{1 - x_n - x_{n-1}(1 - x_n)} \tag{2.23}$$

が見つかっている．また，(2.23) は射影変換 $x_n \to \dfrac{x_n}{1 + x_n}$ により次式

$$x_{n+1} = \frac{x_n - x_{n-1}(1 + x_n)}{1 - x_n - x_{n-1}(-1 - x_n)} \tag{2.24}$$

になる．(2.23) と (2.24) は非常によく似ている．分母の一箇所の符号が違うだけである．このような場合，2 つの式の間に上のような射影変換がなく独立であると判断しがちである．

2.6　3, 4 階非線形差分方程式の再帰性

再帰性をもつ高階非線形差分方程式は十分な数の保存量をもっているので可積分系である．可積分な高階非線形差分方程式の研究がほとんど進んでいない現状では，再帰性をもつ 3 階以上の非線形差分方程式は可積分系の研究の資料としても貴重な存在である．

■ 積分 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx$ の値は？（その 2）

ソリトンの研究過程でこの問題に遭遇した．ソリトンの共鳴現象を発見したが，このときソリトンの衝突の厳密解をプロットしていて不思議な現象を見た．2 つの正のソリトンが衝突後に 2 つの負のソリトンに化けている．ところがソリトン方程式の保存量から負のソリトンの積分は正のソリトンの積分に等しいことが証明される．不思議だ！

この問題はソリトン方程式の差分化によって最終的に解決したが，ここでは簡単化して上記の定積分の問題を考える．差分では直線は無限に分割できるのではなく「最小分割量 ε がある」と考えて演算を構成する．微分公式 $-\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$ は中心差分では

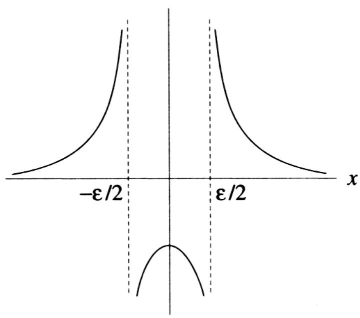
$$-\Delta_x \frac{1}{x} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{x-\frac{\varepsilon}{2}} - \frac{1}{x+\frac{\varepsilon}{2}}\right) = \frac{1}{(x+\frac{\varepsilon}{2})(x-\frac{\varepsilon}{2})}$$

となる．この量を和分（積分に対応する差分の操作）すれば答えは -2 となる．中心差分で考えると定和分の値は -2 が正しい．

ポイントは，右辺の量 $\frac{1}{(x+\frac{\varepsilon}{2})(x-\frac{\varepsilon}{2})}$ が正値ではなく $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$ のとき大きな負の値になることである（次図）．$\varepsilon \to 0$ の極限ではこの負の値が見えなくなる．和分をとるとこの負の値が効いてきて全体として -2 になるのである．非常に大ざっぱに言えば極限操作と積分の順序を入れ替えて，$\int_{-1}^{1} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{dx}{(x+\frac{\varepsilon}{2})(x-\frac{\varepsilon}{2})}$ ではなく

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x+\frac{\varepsilon}{2})(x-\frac{\varepsilon}{2})}$$

のようなものを計算しているのである．



3 階差分方程式

3 階差分方程式の再帰性を調べるために次の形

$$
\begin{aligned}
x_{n+3} = &\Big(a_0 + a_1 x_{n+1} + a_1 x_{n+2} + a_2 x_{n+1} x_{n+2} \\
&\quad - x_n(b_0 + b_1 x_{n+1} + b_2 x_{n+2} + b_3 x_{n+1} x_{n+2})\Big) \\
&\Big/\Big(b_0 + b_2 x_{n+1} + b_1 x_{n+2} + b_3 x_{n+1} x_{n+2} \\
&\quad - x_n(c_0 + c_1 x_{n+1} + c_1 x_{n+2} + c_2 x_{n+1} x_{n+2})\Big)
\end{aligned}
$$

を仮定し，この仮定の範囲で再帰方程式を探す．この差分方程式は時間反転 $(n \to -n)$ に対して不変である．さらに係数 $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, b_3, c_0, c_1, c_2$ の値を $-1, 0, 1$ の 3 種に絞り，係数のすべての組合せについてこの方程式に再帰性があるかどうかを調べる．計算機の出力結果を分析し，整理して得られた再帰方程式を以下に示す．

3 階再帰方程式（周期 4）

周期 4 の 3 階非線形再帰方程式として次の 1 個が見つかっている．

$$
x_{n+3} = -\frac{F_1(x_{n+1}, x_{n+2}) + x_n F_2(x_{n+1}, x_{n+2})}{F_3(x_{n+1}, x_{n+2}) + x_n F_4(x_{n+1}, x_{n+2})}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
F_1(x_{n+1}, x_{n+2}) &= a_0 + a_1 x_{n+1} + a_1 x_{n+2} + a_2 x_{n+1} x_{n+2}, \\
F_2(x_{n+1}, x_{n+2}) &= a_1 + a_2 x_{n+1} + a_3 x_{n+2} + a_4 x_{n+1} x_{n+2}, \\
F_3(x_{n+1}, x_{n+2}) &= a_1 + a_3 x_{n+1} + a_2 x_{n+2} + a_4 x_{n+1} x_{n+2}, \\
F_4(x_{n+1}, x_{n+2}) &= a_2 + a_4 x_{n+1} + a_4 x_{n+2} + a_5 x_{n+1} x_{n+2}
\end{aligned}
$$

である．

3 階再帰方程式（周期 5）

周期 5 の 3 階非線形再帰方程式として次の 1 個が見つかっている．

$$
x_{n+3} = \frac{1 + x_{n+1} + x_{n+2} - x_n x_{n+1} x_{n+2}}{x_n + x_{n+1} x_{n+2} - x_n x_{n+1} x_{n+2}}
$$

3 階再帰方程式（周期 6）

周期 6 の 3 階非線形再帰方程式として現在以下の 7 個が発見されている．

$$x_{n+3} = \frac{-a_0 x_n + a_1 x_n x_{n+1}}{a_0 - a_1 x_n - a_1 x_{n+2} + a_2 x_n x_{n+1} x_{n+2}},$$
$$x_{n+3} = \frac{-a_0 x_n + a_1 x_n x_{n+2}}{a_0 - a_1 x_n - a_1 x_{n+1} + a_2 x_n x_{n+1} x_{n+2}},$$
$$x_{n+3} = \frac{a_0 x_n x_{n+2} + a_1 x_n x_{n+1} x_{n+2}}{a_0 x_n - a_0 x_{n+1} - a_1 x_{n+1} x_{n+2} + a_2 x_n x_{n+1} x_{n+2}},$$
$$x_{n+3} = \frac{a_0 x_n - a_0 x_n x_{n+2} - a_0 x_{n+1} x_{n+2} - a_1 x_n x_{n+1} x_{n+2}}{-a_0 + a_0 x_{n+1} + a_0 x_n x_{n+1} + a_0 x_n x_{n+2} + a_1 x_{n+1} x_{n+2} + a_1 x_n x_{n+1} x_{n+2}},$$
$$x_{n+3} = \frac{1 - x_n - x_{n+1} + x_n x_{n+1} - x_{n+2} - x_n x_{n+2} - x_{n+1} x_{n+2} + x_n x_{n+1} x_{n+2}}{1 - x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} - x_{n+2} - x_n x_{n+2} - x_{n+1} x_{n+2} + x_n x_{n+1} x_{n+2}},$$
$$x_{n+3} = \frac{1 - x_n - x_{n+1} + x_n x_{n+1} - x_{n+2} - x_n x_{n+2} - x_{n+1} x_{n+2}}{1 - x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} - x_{n+2} - x_n x_{n+2} - x_n x_{n+1} x_{n+2}},$$
$$x_{n+3} = \frac{1 - x_n - x_{n+1} - x_n x_{n+1} - x_{n+2} + x_n x_{n+2} - x_{n+1} x_{n+2}}{1 - x_n - x_{n+1} - x_n x_{n+1} + x_{n+2} - x_n x_{n+2} - x_n x_{n+1} x_{n+2}}$$

3 階再帰方程式（周期 8）

周期 8 の 3 階非線形再帰方程式として現在以下の 5 個が発見されている．

$$x_{n+3} = \frac{a_0 + a_1 x_{n+1} + a_1 x_{n+2} + a_2 x_n x_{n+1} + a_2 x_{n+1} x_{n+2}}{a_2 x_n - a_2 x_{n+2}},$$
$$x_{n+3} = \frac{1 - x_n + x_{n+1} + x_{n+2} - x_n x_{n+2} + x_{n+1} x_{n+2}}{1 + x_n + x_{n+1}},$$
$$x_{n+3} = \frac{1 - x_n + x_{n+1} + x_{n+2} - x_n x_{n+1} + x_{n+1} x_{n+2}}{1 + x_n + x_{n+2}},$$
$$x_{n+3} = \frac{-x_n x_{n+2} + x_{n+1} x_{n+2}}{x_n + x_{n+1}},$$
$$x_{n+3} = \frac{1 + x_{n+1} + x_{n+2}}{x_n}$$

最後の式は前に出てきた再帰方程式 (2.4) である．

3 階再帰方程式（周期 10）

周期 10 の 3 階非線形再帰方程式として現在以下の 4 個が発見されている．

$$x_{n+3} = \frac{-1 - x_n + x_n x_{n+2} - x_n x_{n+1} x_{n+2}}{1 - x_{n+1} + x_{n+1} x_{n+2} + x_n x_{n+1} x_{n+2}},$$

$$x_{n+3} = \frac{-1 + x_{n+1} + x_{n+2} + x_n x_{n+2}}{-x_{n+1} - x_n x_{n+1} - x_n x_{n+2} + x_n x_{n+1} x_{n+2}},$$

$$x_{n+3} = \frac{1 - x_n - x_n x_{n+2} - x_{n+1} x_{n+2}}{1 + x_n + x_{n+1}},$$

$$x_{n+3} = \frac{1 - x_{n+1} - x_{n+2} - x_n x_{n+2} - x_{n+1} x_{n+2}}{x_n + x_{n+1}}$$

3 階再帰方程式（周期 12）

周期 12 の 3 階非線形再帰方程式として現在次の 1 個が発見されている．

$$x_{n+3} = \frac{a_0 + a_1 x_{n+1} + a_1 x_{n+2} + a_2 x_n x_{n+1}}{a_2 x_n - a_2 x_{n+2}}$$

4 階再帰方程式（周期 12）

4 階の再帰方程式の研究はほとんど進んでいない．筆者の知る限りで

$$x_{n+4} = \frac{x_n x_{n+3}}{x_n x_{n+2} - x_{n+1}}$$

だけである．この方程式は周期 12 をもつ．

注：この方程式は Kurshan と Copinath の論文 [10] の中で引用されている Conway と Graham による方程式である．なお，この論文では差分方程式から周期を決定する方法を論じている．

より高階の非線形差分方程式の再帰性

紙数の関係で再帰性をもつ 5 階以上の非線形差分方程式の議論は割愛する．これについては文献 [1] に報告している．

第3章

微分方程式の差分化

3.1 はじめに

微分方程式の差分化というとすぐに思い浮かべるのは数値計算のための差分化（差分スキーム）である．差分スキームでは「まず微分方程式ありき」である．与えられた微分方程式の近似計算をするために，微分方程式への収束が速く，安定な計算法を研究するのが第一の目的である．微分方程式に内在する大域的性質，たとえば保存量や厳密解の存在を考慮することは特別な場合以外ほとんどない．数値計算をやっている人は解析的に解けない難しい微分方程式の解を何とかして，近似的にでも求めたいのである．また逆に，厳密解が存在するような場合になぜ差分化が必要なのかと疑問に思うであろう．近似計算を第一とする差分スキームの研究は数学の分野としては関数解析に近い．

一方，この章の目的は「微分方程式に内在する大域的性質」を保存するような差分方程式を構成することである．大域的性質を保存するような差分方程式は何かの役に立つのか？との疑問を持つ人も多いと思う．

筆者（広田）がソリトンの研究を始めた頃，KdV 方程式の数値計算法として有名なザブスキー–クルスカル (Zabusky-Kruskal) の差分スキームがあった．ソリトンの存在を初めて示した計算法である．彼らのスキームは近似が悪いので，より高次なオーダまで近似する改良した差分スキームを使ってソリトンの衝突を計算した人がいる．その結果，ソリトンが衝突によって壊れてし

まった．ところがその後，ソリトンは衝突によって壊れないことが証明されたのでこれは困った結果である．この時以来，ソリトンが衝突によって壊れないような差分スキームがあるのか？を強く意識するようになった．当時，筆者が使える計算機の性能が悪くて普通の差分スキームでは長時間の計算が不可能であった．仕方がないのでソリトン方程式の差分化を研究して正しい差分スキームを得たが，驚いたことに差分空間に移って初めて見えるものがあったのである．

このような差分ソリトン方程式の成功の後，数列の収束を加速する ϵ アルゴリズムが差分 KdV 方程式に，固有値の数値計算法が差分戸田方程式に等しいことが発見された [11,12]．また差分サイン–ゴードン方程式を契機にして差分幾何学が現在発展中である [13]．さらに第 4 章から詳しく議論する超離散方程式と差分ソリトン方程式の関係が明らかになっている．われわれが問題にしている差分方程式は数学の分野としては解析ではなく代数に近い．

一般的に可積分な（この言葉もいろいろと解釈されるが，簡単にいえば良い性質を持つ）非線形微分方程式の差分化は非常に難しい．しかし著者等によって開発された**双線形化法**を使うと比較的容易に可積分な差分方程式を得ることができる．もともと双線形化法はソリトン方程式の厳密解を直接的に（逆散乱法を使わずに）求める方法として発展してきた．最近，双線形微分方程式のもつ**ゲージ不変性**（以下で説明する）が可積分な差分方程式の構成にも有用であることが発見され，この方法が急速に発展している [2]．

双線形化法では以下の 3 ステップによって微分方程式を差分化する．

(i) まず与えられた非線形微分方程式を双線形形式（2 次の同次方程式）に変換する．このためには従属変数を変換する必要がある（たとえば $x = g/f$ とおく）．この双線形微分方程式にはゲージ不変性がある．

(ii) 次に双線形微分方程式を差分化する．このとき差分化された方程式がゲージ不変性を失わないようにする．

(iii) ゲージ不変性をもつ双線形差分方程式の従属変数を逆変換して通常の非線形差分方程式に変換する．

この方法の例題として，最も簡単なリカッチ方程式の差分化から始める．

3.2 リカッチ方程式の差分化

$a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ を既知として，次の形の 1 階常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = a(t) + 2b(t)x + c(t)x^2 \tag{3.1}$$

を**リカッチ方程式** (Riccati equation) という．リカッチ方程式の特別な場合として以下の方程式が挙げられる．

(i) $a(t) = 0$, $b(t) = \alpha/2$, $c(t) = -\alpha/\lambda$ のとき，**ロジスティック方程式** (logistic equation)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{\lambda}x(\lambda - x)$$

となる．

(ii) $a(t) = -1$, $b(t) = 0$, $c(t) = -1$ のとき，2.4 節で議論した方程式

$$\frac{dx}{dt} = -(1 + x^2)$$

になる．

注：Riccati は「リッカチ」と発音したり「リカッチ（英語圏）」と発音したりする．

では，リカッチ方程式の差分化の準備として，方程式を双線形微分方程式に変換する．このために従属変数 x を

$$x(t) = \frac{g(t)}{f(t)} \tag{3.2}$$

と変換する．このとき t の任意関数 $h(t)$ を使って

$$f(t) \to f(t)h(t), \qquad g(t) \to g(t)h(t)$$

と変換しても（これが**ゲージ変換**である），(3.2) の右辺の分子・分母の $h(t)$ が互いに打ち消しあうので，$x(t)$ の値は不変である．

(3.2) を (3.1) に代入すると

$$\frac{dg}{dt}f - g\frac{df}{dt} = af^2 + 2bgf + cg^2 \tag{3.3}$$

が得られる．この方程式は変数 f, g の 2 次の同次式である．ソリトン理論にならってこれを**双線形微分方程式**と呼ぶ．(3.3) は**ゲージ不変**である．確かにこの式の左辺と右辺はゲージ変換によって

$$\frac{dg}{dt}f - g\frac{df}{dt} \ \rightarrow \ \left(\frac{dg}{dt}f - g\frac{df}{dt}\right)h^2,$$

$$af^2 + 2bgf + cg^2 \ \rightarrow \ (af^2 + 2bgf + cg^2)h^2$$

となるが，左辺と右辺に共通に現れる h^2 の項は打ち消しあうからである．

双線形微分方程式 (3.3) の解を求めるために式を書き直すと次のようになる．

$$\left(\frac{dg}{dt} - a(t)f - b(t)g\right)f = g\left(\frac{df}{dt} + b(t)f + c(t)g\right)$$

ここで任意関数 $\alpha(t)$ を導入すると上式は次の 2 式に分離される．

$$\frac{df}{dt} + b(t)f + c(t)g = \alpha(t)f,$$

$$\frac{dg}{dt} - a(t)f - b(t)g = \alpha(t)g$$

ここでゲージ変換

$$f \rightarrow f\exp\int^t \alpha dt, \qquad g \rightarrow g\exp\int^t \alpha dt$$

を行うと，上の 2 式は

$$\frac{df}{dt} + b(t)f + c(t)g = 0,$$

$$\frac{dg}{dt} - a(t)f - b(t)g = 0$$

となる．この連立線形方程式の解 f, g によってリカッチ方程式 (3.1) の解 $x(t) = \dfrac{g}{f}$ が求まる．たとえば a, b, c が定数で，$c \neq 0$, $b^2 - ac \neq 0$ のとき

$$x(t) = \frac{g(t)}{f(t)} = \frac{c_+ + c_- \exp 2\omega(t - t_0)}{1 + \exp 2\omega(t - t_0)}$$

となる．ここで $c_\pm = (-b \pm \sqrt{b^2 - ac})/c, \omega = \sqrt{b^2 - ac}$，$t_0$ は任意定数である．

次に第 2 ステップとして双線形微分方程式 (3.3) を差分化する．左辺の微分を前進差分：

$$\frac{df}{dt} \rightarrow \frac{f(t+\delta) - f(t)}{\delta}, \qquad \frac{dg}{dt} \rightarrow \frac{g(t+\delta) - g(t)}{\delta} \qquad (\delta \text{ は差分間隔})$$

に置き換えると，次の双線形差分方程式

$$\delta^{-1}\{(g(t+\delta)-g(t))f(t)-g(t)(f(t+\delta)-f(t))\}$$
$$=a(t)f(t)^2+2b(t)g(t)f(t)+c(t)g(t)^2$$

が得られる．この式は

$$g(t+\delta)f(t)-g(t)f(t+\delta)$$
$$=\delta\left\{a(t)f(t)^2+2b(t)g(t)f(t)+c(t)g(t)^2\right\} \tag{3.4}$$

に等しい．ここで双線形差分方程式のゲージ不変性をチェックする．ゲージ変換 $f(t)\to f(t)h(t)$, $g(t)\to g(t)h(t)$ によって (3.4) は

$$\{g(t+\delta)f(t)-g(t)f(t+\delta)\}h(t+\delta)h(t)$$
$$=\delta\{a(t)f(t)^2+2b(t)g(t)f(t)+c(t)g(t)^2\}h(t)^2$$

となるが，左辺と右辺に共通に現れる項は $h(t)$ の 1 次だけである．したがって (3.4) はゲージ不変ではない．ゲージ不変になるためには，右辺の係数は $h(t)^2$ ではなく $h(t+\delta)h(t)$ でなければならない．そこでゲージ不変になるように右辺を書き直す．$s_1+s_2=2$ を満たす任意パラメータ s_1, s_2 を導入すると，次のゲージ不変な双線形差分方程式が得られる．

$$g(t+\delta)f(t)-g(t)f(t+\delta)$$
$$=\delta\{a(t)f(t+\delta)f(t)+b(t)\left(s_1g(t+\delta)f(t)+s_2g(t)f(t+\delta)\right)$$
$$+c(t)g(t+\delta)g(t)\} \tag{3.5}$$

第 3 のステップはこの方程式を変数変換によって通常の差分方程式の形に書き直すことである．変換式 (3.2) と同様ここでも

$$x(t)=\frac{g(t)}{f(t)}$$

とおき，(3.5) の両辺を $f(t)f(t+\delta)$ で割ると

$$x(t+\delta)-x(t)$$
$$=\delta\{a(t)+b(t)\left(s_1x(t+\delta)+s_2x(t)\right)+c(t)x(t)x(t+\delta)\} \tag{3.6}$$

が得られる．この式がリカッチ方程式の可積分な差分方程式である．

一般解を求めるために，n を整数として $t = n\delta$, $x(t) = x_n$ などとおいて (3.6) を書き直すと

$$x_{n+1} = \frac{(1+\delta s_2 b_n)x_n + \delta a_n}{-\delta c_n x_n + 1 - \delta s_1 b_n} \tag{3.7}$$

となる．これは第 2 章で議論した射影変換である．x_{n+1}, x_{n+2} は行列 M_n すなわち

$$M_n = \begin{pmatrix} 1+\delta s_2 b_n & \delta a_n \\ -\delta c_n & 1-\delta s_1 b_n \end{pmatrix}$$

を使って

$$x_{n+1} = \frac{(M_n)_{11}x_n + (M_n)_{12}}{(M_n)_{21}x_n + (M_n)_{22}},$$
$$x_{n+2} = \frac{(M_{n+1})_{11}x_{n+1} + (M_{n+1})_{12}}{(M_{n+1})_{21}x_{n+1} + (M_{n+1})_{22}} = \frac{(M_{n+1}M_n)_{11}x_n + (M_{n+1}M_n)_{12}}{(M_{n+1}M_n)_{21}x_n + (M_{n+1}M_n)_{22}}$$

と表現される．より一般的に，(3.7) の形式解は

$$x_{n+k} = \frac{(M_{n+k-1}\cdots M_{n+1}M_n)_{11}x_n + (M_{n+k-1}\cdots M_{n+1}M_n)_{12}}{(M_{n+k-1}\cdots M_{n+1}M_n)_{21}x_n + (M_{n+k-1}\cdots M_{n+1}M_n)_{22}}$$

と表される．変数係数のリカッチ微分方程式の一般解の表現は難しいが差分では形式解が簡単に求められる．

差分ロジスティック方程式

差分リカッチ方程式 (3.6) のパラメータを $a(t) = 0$, $b(t) = \alpha/2$, $c(t) = -\alpha/\lambda$ と選ぶと**差分ロジスティック方程式**

$$x(t+\delta) - x(t) = \frac{\delta\alpha}{\lambda}\left\{\frac{1}{2}\lambda\left(s_1 x(t+\delta) + s_2 x(t)\right) - x(t)x(t+\delta)\right\}$$

となる．自由パラメータ s_1, s_2 $(s_1 + s_2 = 2)$ の選び方によって以下のようなロジスティック方程式の差分化が得られる．

(i)　$s_2 = 0$ のとき

$$x(t+\delta) - x(t) = \frac{\delta\alpha}{\lambda}x(t+\delta)\left(\lambda - x(t)\right)$$

となる．この式は森下によって 1965 年に求められている [14]．解は m を任意定数として

$$x(t) = \frac{\lambda}{1 + m(1 - \delta\alpha)^{t/\delta}}$$

と表される．

(ii) $s_1 = 0$ のとき

$$x(t+\delta) - x(t) = \frac{\delta\alpha}{\lambda} x(t)\,(\lambda - x(t+\delta))$$

となる．解は

$$x(t) = \frac{\lambda}{1 + m(1 + \delta\alpha)^{-t/\delta}}$$

と表される．

(iii) s_1 が上記以外のとき

解は

$$x(t) = \frac{\lambda}{1 + m(\frac{1+\delta\alpha s_2/2}{1-\delta\alpha s_1/2})^{-t/\delta}}$$

と表されるが，さらに s_1 が

$$\frac{1 + \delta\alpha s_2/2}{1 - \delta\alpha s_1/2} = \exp(\alpha\delta)$$

を満たすとき，差分ロジスティック方程式の解は（微分）ロジスティック方程式の解

$$x(t) = \frac{\lambda}{1 + m\exp(-\alpha t)}$$

と全く同じ形になる．図 3.1 に示すように差分方程式の解は微分方程式の解の上を飛び飛びに移るようになる．

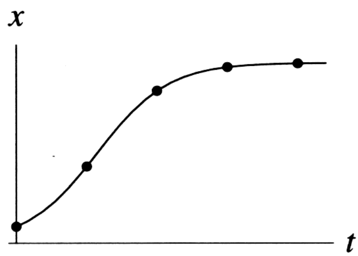


図 3.1 微分と差分のロジスティック方程式の解（微分が実線，差分が黒丸）

なお，ここで議論した可積分差分方程式は統計的予測に利用されている [15,16].

3.3　非線形振動子

非線形（非調和）振動子 (nonlinear oscillator, anharmonic oscillator) は次の微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+ax+bx^2+cx^3=0$$

で記述される．ここで a, b, c は定数である．

保存量は

$$H(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{3}bx^3+\frac{1}{4}cx^4$$

である．H を微分すると

$$\frac{dH}{dt}=\frac{dx}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}+ax+bx^2+cx^3\right)=0 \tag{3.8}$$

となり，確かに保存している．そこで，可積分性を保つ，すなわち今の場合は保存量を一定にするように非線形振動方程式を差分化する [18]．ポイントは保存量の微分 (3.8) の差分化である．

線形振動子

簡単のためにまず**線形（調和）振動子** (linear oscillator, harmonic oscillator) の場合 ($a>0$, $b=c=0$)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+ax=0$$

を考える．保存量

$$H(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}ax^2$$

を差分化する．単純に微分を後退差分に置き換えると H は

$$H(t)\to\frac{1}{2\delta^2}\left(x(t)-x(t-\delta)\right)^2+\frac{1}{2}ax(t)^2$$

となるが，この H の差は

$$
\begin{aligned}
&H(t+\delta)-H(t)\\
&\quad=\frac{1}{2\delta^2}\left(x(t+\delta)-x(t-\delta)\right)\left(x(t+\delta)-2x(t)+x(t-\delta)\right)\\
&\qquad+\frac{1}{2}a\left(x(t+\delta)-x(t)\right)\left(x(t+\delta)+x(t)\right)
\end{aligned}
$$

となって右辺は因数分解されず，x の差分方程式が得られない．

失敗の原因は振動方程式の対称性を無視したことにある．振動方程式は時間反転 $(t\to -t)$ によって不変である．したがって差分方程式も時間反転（$t\to -t$ または $+\delta$ と $-\delta$ の入れ替え）によって不変であるべきであり，保存量 $H(t)$ もそうならなければならない．微分のときには意識されなかった時間対称性が差分になると重要になる．

時間対称性（t と $t-\delta$ についての対称性）を考えると微分の場合のポテンシャル $x(t)^2$ は

$$
\frac{a}{2}x(t)^2 \to c_1\left(x(t)^2+x(t-\delta)^2\right)+2c_2x(t)x(t-\delta)
$$

のように置き換えられる．ここで c_1, c_2 はパラメータである．したがって H は

$$
H(t)=\frac{1}{2\delta^2}\left(x(t)-x(t-\delta)\right)^2+c_1\left(x(t)^2+x(t-\delta)^2\right)+2c_2x(t)x(t-\delta)
$$

となる．すると $H(t+\delta)-H(t)$ は

$$
\begin{aligned}
&H(t+\delta)-H(t)\\
&\quad=\frac{1}{2\delta^2}\left(x(t+\delta)-x(t-\delta)\right)\left(x(t+\delta)-2x(t)+x(t-\delta)\right)\\
&\qquad+c_1\left(x(t+\delta)-x(t-\delta)\right)\left(x(t+\delta)+x(t-\delta)\right)\\
&\qquad+2c_2\left(x(t+\delta)-x(t-\delta)\right)x(t)
\end{aligned}
$$

となる．共通因子 $x(t+\delta)-x(t-\delta)$ があるので差分方程式を

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\delta^2}\left(x(t+\delta)-2x(t)+x(t-\delta)\right)\\
&\qquad+2c_1\left(x(t+\delta)+x(t-\delta)\right)+4c_2x(t)=0
\end{aligned}
$$

と選べば $H(t+\delta)-H(t)=0$ となる．これが求める線形振動方程式の差分化である．

パラメータ c_1, c_2 は $\delta \to 0$ の極限で微分方程式に一致するように

$$c_1 + c_2 = \frac{a}{4}$$

と定める．c_1, c_2 はこの条件を満たせば任意でよい．上の線形差分方程式の特解のひとつに

$$x(t) = x_0 \cos(\omega(t - t_0)),$$
$$\cos(\omega\delta) = \frac{1 - 2c_2\delta^2}{1 + 2c_1\delta^2}$$

がある．ここで t_0 は初期時刻，x_0 は $x(t)$ の初期値 $x(t_0)$ である．さらに c_1, c_2 が次式

$$\cos(\sqrt{a}\delta) = \frac{1 - 2c_2\delta^2}{1 + 2c_1\delta^2}$$

も満たすとき，差分方程式の解は微分方程式の解

$$x(t) = x_0 \cos(\sqrt{a}(t - t_0))$$

と全く同じ形になる．図 3.2 に示すように差分方程式の解は微分方程式の解の上を飛び飛びに移っている．

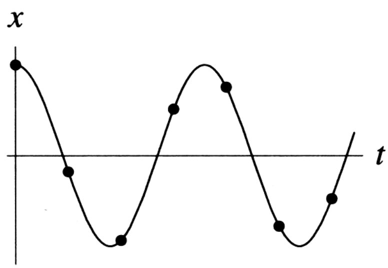


図 3.2　微分と差分の線形振動方程式の解（微分が実線，差分が黒丸）

差分スキームの常識（？）では差分間隔 δ は周期より小さく選ぶことが必要だが，可積分差分では δ は周期より大きくなってもよい．

非線形振動子

非線形振動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax + bx^2 + cx^3 = 0 \tag{3.9}$$

の差分化も線形のときと同じように実行される．ポテンシャル $x(t)^3$, $x(t)^4$ は時間対称性を考慮して

$$x(t)^3 \to \frac{1}{2}(x(t)^2x(t-\delta)+x(t)x(t-\delta)^2),$$
$$x(t)^4 \to x(t)^2x(t-\delta)^2$$

で置き換える．

注：上式では $x(t)$, $x(t-\delta)$ の 3 乗以上の項を除いている．3 乗以上の項があると差分方程式に $x(t+\delta)$, $x(t-\delta)$ の 2 乗以上の項が現れ，解の一意性が失われるからである．

c_3, c_4 を新しいパラメータとして次の形の $H(t)$ を選ぶ．

$$\begin{aligned}H(t) &= \frac{1}{2\delta^2}\left(x(t)-x(t-\delta)\right)^2\\ &\quad + c_1\left(x(t)^2+x(t-\delta)^2\right)+2c_2x(t)x(t-\delta)\\ &\quad + c_3\left(x(t)^2x(t-\delta)+x(t)x(t-\delta)^2\right)\\ &\quad + c_4x(t)^2x(t-\delta)^2\end{aligned}$$

すると

$$\begin{aligned}&H(t+\delta)-H(t)\\ &\quad = \frac{1}{2\delta^2}\left(x(t+\delta)-x(t-\delta)\right)\left(x(t+\delta)-2x(t)+x(t-\delta)\right)\\ &\qquad + c_1\left(x(t+\delta)-x(t-\delta)\right)\left(x(t+\delta)+x(t-\delta)\right)\\ &\qquad + 2c_2\left(x(t+\delta)-x(t-\delta)\right)x(t)\\ &\qquad + c_3\left(x(t+\delta)-x(t-\delta)\right)\left(x(t)^2+x(t)(x(t+\delta)+x(t-\delta))\right)\\ &\qquad + c_4\left(x(t+\delta)-x(t-\delta)\right)x(t)^2\left(x(t+\delta)+x(t-\delta)\right)\end{aligned}$$

となる．共通因子 $x(t+\delta)-x(t-\delta)$ があるので差分方程式を

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\delta^2}\left(x(t+\delta)-2x(t)+x(t-\delta)\right)\\ &\quad + 2c_1\left(x(t+\delta)+x(t-\delta)\right)+4c_2x(t)\\ &\quad + 2c_3\left(x(t)^2+x(t)(x(t+\delta)+x(t-\delta))\right)+2c_4x(t)^2\left(x(t+\delta)+x(t-\delta)\right)\\ &\quad = 0\end{aligned}$$

と選べば $H(t+\delta)-H(t)=0$ となる．これが求める非線形振動方程式の差分化である．新しいパラメータ c_3, c_4 は $\delta\to 0$ の極限で微分方程式に一致するように

$$c_3=\frac{b}{6},\quad c_4=\frac{c}{4}$$

と定める．

注：方程式 (3.9) の差分化は文献 [19] に議論されている．

3.4　双線形化法による差分化

3.2 節では双線形化法の易しい例題としてリカッチ方程式の差分化を行った．ここでは前節に引き続き双線形化法による非線形振動方程式の差分化を行う．この方法では，まず与えられた非線形微分方程式を双線形形式に変換する．このために従属変数 x を

$$x=\frac{g}{f}$$

とおいて非線形振動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+ax+bx^2+cx^3=0 \tag{3.10}$$

を書き直す．

双線形微分演算子

双線形演算子 D_t は次のように定義される．任意の関数 $a(t), b(t)$ と自然数 m に対して

$$D_t^m a(t)\cdot b(t)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)^m a(t)b(t')\Big|_{t'=t}$$

である．この定義より，次の結果が得られる．

$$\begin{aligned}
D_t a\cdot b&=a_t b-ab_t,\\
D_t^2 a\cdot b&=a_{tt}b-2a_tb_t+ab_{tt},\\
D_t^3 a\cdot b&=a_{ttt}b-3a_{tt}b_t+3a_tb_{tt}-ab_{ttt},\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

この演算子を使うと有理関数 $\dfrac{g}{f}$ の微分は

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{g}{f}, \\
\frac{dx}{dt} &= \frac{g_t f - g f_t}{f^2} = \frac{D_t g \cdot f}{f^2}, \\
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{g_{tt} f - g f_{tt}}{f^2} - \frac{2 f_t (g_t f - g f_t)}{f^3} \\
&= \frac{g_{tt} f - 2 g_t f_t + g f_{tt}}{f^2} - \frac{g}{f} \, \frac{f_{tt} f - 2 f_t f_t + f f_{tt}}{f^2} \\
&= \frac{D_t^2 g \cdot f}{f^2} - \frac{g}{f} \, \frac{D_t^2 f \cdot f}{f^2}
\end{aligned}
$$

と表される．

双線形微分方程式

上の公式を使うと (3.10) は

$$
\frac{D_t^2 g \cdot f}{f^2} - \frac{g}{f} \, \frac{D_t^2 f \cdot f}{f^2} + a\frac{g}{f} + b\frac{g^2}{f^2} + c\frac{g^3}{f^3} = 0
$$

と表現される．この式の分母を払うと

$$
f(D_t^2 g \cdot f) - g(D_t^2 f \cdot f) + a f^2 g + b f g^2 + c g^3 = 0
$$

となる．まとめ直すと

$$
f\left(D_t^2 g \cdot f + a_1 g f + b_1 g^2\right) + g(-D_t^2 f \cdot f + a_2 f^2 + b_2 f g + c g^2) = 0 \qquad (3.11)
$$

が得られる．ただし $a_1 + a_2 = a,\ b_1 + b_2 = b$ である．ここで (3.11) がゲージ変換

$$
f(t) \to f(t)h(t), \qquad g(t) \to g(t)h(t)
$$

によって不変であることをチェックする．

双線形演算子の公式

$$
D_t^2 fh \cdot gh = \left(D_t^2 f \cdot g\right) h^2 + fg \left(D_t^2 h \cdot h\right)
$$

を使うと，(3.11) はゲージ変換によって

$$fh\left((D_t^2 g\cdot f)h^2 + gf(D_t^2 h\cdot h) + a_1 gfh^2 + b_1 g^2h^2\right)$$
$$+ gh\left(-(D_t^2 f\cdot f)h^2 - f^2(D_t^2 h\cdot h) + a_2 f^2h^2 + b_2 fgh^2 + cg^2h^2\right) = 0$$

となるが，$D_t^2 h\cdot h$ の項は互いに打ち消しあうので h^3 で割ると

$$f\left(D_t^2 g\cdot f + a_1 gf + b_1 g^2\right) + g(-D_t^2 f\cdot f + a_2 f^2 + b_2 fg + cg^2) = 0$$

となり，ゲージ不変性が確かめられる．

(3.11) は任意関数 $\alpha(t)$ を導入すると次の 2 式に分離される．

$$D_t^2 g\cdot f + a_1 gf + b_1 g^2 = \alpha gf, \tag{3.12}$$

$$-D_t^2 f\cdot f + a_2 f^2 + b_2 fg + cg^2 = -\alpha f^2 \tag{3.13}$$

ここでは一般性を失わずに $\alpha(t) = 0$ と選べる．なぜならゲージ変換

$$f \to f\phi, \qquad g \to g\phi$$

によって，(3.12), (3.13) は

$$D_t^2 g\cdot f + a_1 gf + b_1 g^2 = \left(\alpha - \frac{D_t^2\phi\cdot\phi}{\phi^2}\right)gf,$$
$$-D_t^2 f\cdot f + a_2 f^2 + b_2 fg + cg^2 = -\left(\alpha - \frac{D_t^2\phi\cdot\phi}{\phi^2}\right)f^2$$

と書き直せるので

$$\frac{D_t^2\phi\cdot\phi}{\phi^2} = 2\frac{d^2}{dt^2}\log\phi = \alpha$$

を満たすゲージ ϕ を選ぶと (3.12), (3.13) の右辺を 0 にした方程式に変換できるからである．したがって方程式 (3.11) は次の 2 式に分解される．

$$D_t^2 g\cdot f + a_1 gf + b_1 g^2 = 0, \tag{3.14}$$

$$-D_t^2 f\cdot f + a_2 f^2 + b_2 fg + cg^2 = 0 \tag{3.15}$$

これが求める非線形振動方程式の双線形形式である．

■ **双線形演算子 $D_t a\cdot b = a_t b - a b_t$**

「数学の本を読むと変な記号の羅列で，それだけで数学が嫌いになる」と思われる読者も多いと想像する．筆者（広田）もその一人である．それなのにどうして $D_t a\cdot b$ などという変な記号を使うのか，と文句が出そうである．実際，物理学者から「$D_t a\cdot b$ はどのような意味があるの？」「素粒子論ではこれと同じものを表す記号 $a(\overleftarrow{\partial_t} - \overrightarrow{\partial_t})b$ が既に存在する．新しい記号を勝手に作るのは困る」と言われ，数学者から「$D_t a\cdot b$ は 2 項演算子だから正式には括弧を使って $D_t(a,b)$ と書くべきだ」と言われた経験がある．

筆者が最初に論文を書いてからこの記号を使うまで 3 年かかっている．記号を大量に使う必要に迫られたためである．$D_t(a,b)$ より $D_t a\cdot b$ の方が 2 文字少なくてすむ．大量に使うとこの差が効くのである．面白いことに外国の人が論文の中でこの記号を使うとき，最初の論文では $D_t(a,b)$ と書いているのが 2 回目からは $D_t a\cdot b$ となっている．つい最近国際会議で,「可積分関係の論文では記号 $D_t a\cdot b$ は定義なしに使われているが，定義して使っているのは広田だけである」と指摘されて驚いている．

双線形差分演算子

次のステップは双線形微分方程式 (3.14), (3.15) の差分化である．その準備としてまず双線形演算子の差分化を行う．通常の微分演算子の差分化は主として以下の 3 通りがある．

(i)　前進差分

$$\Delta_{+t} f(t) = \delta^{-1}\left(\exp\left(\delta\frac{d}{dt}\right) - 1\right) f(t) = \delta^{-1}\left(f(t+\delta) - f(t)\right)$$

(ii)　中心差分

$$\begin{aligned}\Delta_t f(t) &= \delta^{-1}\left(\exp\left(\frac{\delta}{2}\frac{d}{dt}\right) - \exp\left(-\frac{\delta}{2}\frac{d}{dt}\right)\right) f(t)\\ &= \delta^{-1}\left(f(t+\delta/2) - f(t-\delta/2)\right)\end{aligned}$$

(iii)　後退差分

$$\Delta_{-t} f(t) = \delta^{-1}\left(1 - \exp\left(-\delta\frac{d}{dt}\right)\right) f(t) = \delta^{-1}\left(f(t) - f(t-\delta)\right)$$

ただし，

$$\exp\left(c\delta\frac{d}{dt}\right) f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c\delta)^n}{n!}\frac{d^n f(t)}{dt^n} = f(t+c\delta)$$

を用いている．また，前進差分と後退差分は中心差分を使って

$$\Delta_{+t} f(t) = \Delta_t f(t)|_{t \to t+\delta/2},$$
$$\Delta_{-t} f(t) = \Delta_t f(t)|_{t \to t-\delta/2}$$

とも表現できる．

双線形微分演算子の差分化を定義する前に，まず**指数型双線形演算子**

$$\exp(\delta D_t) a(t) \cdot b(t) = \exp\left(\delta\left(\frac{d}{dt} - \frac{d}{dt'}\right)\right) a(t) b(t')\Big|_{t'=t} = a(t+\delta) b(t-\delta)$$

を導入する．この演算子を使うと D_t の差分化（中心差分），すなわち**双線形差分演算子**は，中心差分の定義の $\dfrac{d}{dt}$ を D_t で置き換えて，

$$\begin{aligned} D_t a \cdot b \to \Delta_t a(t) \cdot b(t) &= \delta^{-1}\left(\exp\left(\frac{\delta}{2} D_t\right) - \exp\left(-\frac{\delta}{2} D_t\right)\right) a(t) \cdot b(t) \\ &= \delta^{-1}\left(a(t+\delta/2) b(t-\delta/2) - a(t-\delta/2) b(t+\delta/2)\right) \end{aligned}$$

となる．前進差分形式 Δ_{+t} と後退差分形式 Δ_{-t} はこの中心差分形式を使って

$$\Delta_{+t} a(t) \cdot b(t) = \Delta_t a(t) \cdot b(t)\Big|_{t \to t+\delta/2} = \delta^{-1}\left(a(t+\delta) b(t) - a(t) b(t+\delta)\right),$$
$$\Delta_{-t} a(t) \cdot b(t) = \Delta_t a(t) \cdot b(t)\Big|_{t \to t-\delta/2} = \delta^{-1}\left(a(t) b(t-\delta) - a(t-\delta) b(t)\right)$$

と定義される．なお，差分公式

$$\Delta_{+t} \Delta_{-t} f(t) = \Delta_t^2 f(t)$$

がいつでも成り立つが，双線形差分演算子でも公式

$$\begin{aligned} \Delta_{+t} \Delta_{-t} a(t) \cdot b(t) &= \delta^{-1} \Delta_{+t}\left(a(t) \cdot b(t-\delta) - a(t-\delta) \cdot b(t)\right) \\ &= \delta^{-2}\left(a(t+\delta) b(t-\delta) - 2a(t) b(t) + a(t-\delta) b(t+\delta)\right) \\ &= \Delta_t^2 a(t) \cdot b(t) \end{aligned}$$

が成り立つ．

双線形微分方程式の差分化

双線形微分方程式 (3.11) をもう一度下に記す．

$$f\left(D_t^2 g\cdot f + a_1 gf + b_1 g^2\right) + g(-D_t^2 f\cdot f + a_2 f^2 + b_2 fg + cg^2) = 0 \qquad (3.16)$$

この方程式はゲージ変換

$$f(t)\to f(t)h(t), \qquad g(t)\to g(t)h(t)$$

によって不変であった．したがって (3.16) を差分化した式もゲージ不変であることを要請する．

(3.16) の差分化はまず D_t^2 を Δ_t^2 に置き換えることから始まる．この置き換えによって (3.16) は

$$f\left(\Delta_t^2 g\cdot f + a_1 gf + b_1 g^2\right) + g(-\Delta_t^2 f\cdot f + a_2 f^2 + b_2 fg + cg^2) = 0 \qquad (3.17)$$

となる．Δ_t^2 の公式

$$\Delta_t^2 g(t)h(t)\cdot f(t)h(t) = \left(\Delta_t^2 g(t)\cdot f(t)\right) h(t+\delta)h(t-\delta) + g(t)f(t)\Delta_t^2 h(t)\cdot h(t)$$

を使って調べると，(3.17) はゲージ変換によって不変ではないことがわかる．ゲージ不変な方程式は

$$\begin{aligned} &f(t)\{\Delta_t^2 g(t)\cdot f(t) + a_1\left(g(t+\delta)f(t-\delta) + g(t-\delta)f(t+\delta)\right)/2 \\ &\qquad + b_1 g(t+\delta)g(t-\delta)\} \\ &+ g(t)\{-\Delta_t^2 f(t)\cdot f(t) + a_2 f(t+\delta)f(t-\delta) \\ &\qquad + b_2(f(t+\delta)g(t-\delta) + f(t-\delta)g(t+\delta))/2 \\ &\qquad + cg(t+\delta)g(t-\delta)\} = 0 \end{aligned} \qquad (3.18)$$

である．この式をゲージ変換すると，双線形微分方程式 (3.16) の場合と同じように $\Delta_t^2 h(t)\cdot h(t)$ を含む項は互いに打ち消し合い，全体を $h(t)h(t+\delta)h(t-\delta)$ で割ると元の方程式に等しくなる．

方程式 (3.18) は任意関数 $\alpha(t)$ を導入すると次の 2 式に分解される．

$$\begin{aligned} &\Delta_t^2 g(t)\cdot f(t) + a_1\left(g(t+\delta)f(t-\delta) + g(t-\delta)f(t+\delta)\right)/2 \\ &\qquad + b_1 g(t+\delta)g(t-\delta) = \alpha(t)g(t)f(t), \end{aligned} \qquad (3.19)$$

$$
\begin{aligned}
&-\Delta_t^2 f(t)\cdot f(t) + a_2 f(t+\delta)f(t-\delta)\\
&\quad + b_2(f(t+\delta)g(t-\delta) + f(t-\delta)g(t+\delta))/2\\
&\quad + cg(t+\delta)g(t-\delta) = -\alpha(t)f(t)^2
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

ここでは一般性を失わずに $\alpha(t)=0$ と選べる．なぜなら双線形微分方程式 (3.16) の場合と同じように

$$
\frac{\Delta_t^2\phi(t)\cdot\phi(t)}{\phi(t)^2} = \alpha(t)
$$

を満たすゲージ $\phi(t)$ を選ぶと変換

$$
f \to f\phi, \qquad g \to g\phi
$$

によって，(3.19), (3.20) の右辺が 0 となるからである．したがって次の 2 式が求める双線形差分方程式となる．

$$
\begin{aligned}
&\Delta_t^2 g(t)\cdot f(t) + a_1\left(g(t+\delta)f(t-\delta) + g(t-\delta)f(t+\delta)\right)/2\\
&\quad + b_1 g(t+\delta)g(t-\delta) = 0,
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\Delta_t^2 f(t)\cdot f(t) + a_2 f(t+\delta)f(t-\delta)\\
&\quad + b_2(f(t+\delta)g(t-\delta) + f(t-\delta)g(t+\delta))/2\\
&\quad + cg(t+\delta)g(t-\delta) = 0
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

非線形振動方程式

次のステップでは双線形差分方程式 (3.21), (3.22) を逆変換して通常の差分方程式に戻す．変換式

$$
g(t) = x(t)f(t)
$$

を (3.21), (3.22) に代入する．差分公式

$$
\begin{aligned}
\Delta_t^2 g(t)\cdot f(t) &= \Delta_t^2 x(t)f(t)\cdot f(t)\\
&= (\Delta_t^2 x(t))f(t+\delta)f(t-\delta) + x(t)(\Delta_t^2 f(t)\cdot f(t))
\end{aligned}
$$

を使うと (3.21), (3.22) は

$$
\begin{aligned}
&(\Delta_t^2 x(t))f(t+\delta)f(t-\delta) + x(t)(\Delta_t^2 f(t)\cdot f(t))\\
&\quad + a_1\left(x(t+\delta)f(t+\delta)f(t-\delta) + x(t-\delta)f(t-\delta)f(t+\delta)\right)/2\\
&\qquad + b_1 x(t+\delta)x(t-\delta)f(t+\delta)f(t-\delta) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \Delta_t^2 f(t) \cdot f(t) + a_2 f(t+\delta) f(t-\delta) \\
&\quad + b_2 (f(t+\delta) x(t-\delta) f(t-\delta) + f(t-\delta) x(t+\delta) f(t+\delta))/2 \\
&\qquad + c x(t+\delta) x(t-\delta) f(t+\delta) f(t-\delta) = 0
\end{aligned}
$$

となるが，この両式を用いて $\Delta_t^2 f(t) \cdot f(t)$ の項を消去して整理すると

$$
\begin{aligned}
&\Delta_t^2 x(t) + \frac{1}{2} a_1 (x(t+\delta) + x(t-\delta)) + a_2 x(t) + b_1 x(t+\delta) x(t-\delta) \\
&\quad + \frac{1}{2} b_2 x(t) (x(t+\delta) + x(t-\delta)) + c x(t+\delta) x(t) x(t-\delta) = 0
\end{aligned}
$$

が得られる．これが求める非線形振動方程式の差分化である．n を整数として $t = n\delta$, $x(t) = x_n$ とすると，上式をマッピング形式

$$
x_{n+1} = \frac{(2 - \delta^2 a_2) x_n - x_{n-1}(1 + \frac{1}{2}\delta^2 a_1 + \frac{1}{2}\delta^2 b_2 x_n)}{1 + \frac{1}{2}\delta^2 a_1 + \frac{1}{2}\delta^2 b_2 x_n - x_{n-1}(-\delta^2 b_1 - \delta^2 c x_n)} \tag{3.23}
$$

で表すことができる．一般的に次の形のマッピング（a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1 は定数）

$$
x_{n+1} = \frac{a_0 + a_1 x_n - x_{n-1}(b_0 + b_1 x_n)}{b_0 + b_1 x_n - x_{n-1}(c_0 + c_1 x_n)} \tag{3.24}
$$

は QRT 系に変換できるので，(3.23) には保存量があり可積分である．

なお，(3.24) の右辺は有理式である．後で一般的な有理式によるマッピングの保存量の原理的な計算法について述べるが，そのときの例題として方程式 (3.24) の保存量を計算する．

3.5 オイラーのコマ

オイラーのコマ (Euler's top) は質量の中心が固定されているコマである．このコマの運動は次の連立微分方程式で記述される．

$$
\begin{aligned}
I_1 \frac{d\omega_1}{dt} &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3, \\
I_2 \frac{d\omega_2}{dt} &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \\
I_3 \frac{d\omega_3}{dt} &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

ここで I_1, I_2, I_3 は定数でコマの回転モーメントを表している．この運動方程式には次の 2 つの保存量

$$H_1 = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2,$$
$$H_2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 \tag{3.26}$$

がある．ここではこの運動方程式の差分化を行う．

保存量による差分化

まず考えられるのは保存量による差分化である [20]．このとき第一に思いつくのは，(3.26) と同じ形の差分の保存量を仮定し，これを不変にするように差分方程式を定めるというやり方である．Bobenko 達は次の結果を得ている．

$$\omega_1(t+\delta) - \omega_1(t) = \delta_1 \frac{1}{2}\gamma(\boldsymbol{\omega})[\omega_2(t+\delta)+\omega_2(t)][\omega_3(t+\delta)+\omega_3(t)],$$
$$\omega_2(t+\delta) - \omega_2(t) = \delta_2 \frac{1}{2}\gamma(\boldsymbol{\omega})[\omega_3(t+\delta)+\omega_3(t)][\omega_1(t+\delta)+\omega_1(t)],$$
$$\omega_3(t+\delta) - \omega_3(t) = \delta_3 \frac{1}{2}\gamma(\boldsymbol{\omega})[\omega_1(t+\delta)+\omega_1(t)][\omega_2(t+\delta)+\omega_2(t)]$$

ここで

$$\delta_1 = \frac{\delta(I_2 - I_3)}{2I_1}, \quad \delta_2 = \frac{\delta(I_3 - I_1)}{2I_2}, \quad \delta_3 = \frac{\delta(I_1 - I_2)}{2I_3} \tag{3.27}$$

であり，$\gamma(\boldsymbol{\omega})$ は $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ の任意関数である．

ところが，この差分方程式は**陰的** (implicit) であり，しかも解の一意性が保証されない．数値計算のスキームとしては問題ないが，可積分な差分方程式と主張するのは難しい．なお，保存量の条件を緩めて $\delta \to 0$ の極限で (3.26) になるような差分の保存量 H_1', H_2' を考えても，それらが ω_i の多項式であるとすると，陽的で可積分な差分方程式は見つからない．実は，陽的で可積分な差分化は双線形化法によって得られる [21]．

双線形微分方程式

まず変数を

$$\omega_j = \frac{g_j}{f} \qquad (j = 1,\ 2,\ 3)$$

と変換する．これを方程式 (3.25) に代入すると

$$I_1 D_t g_1 \cdot f = (I_2 - I_3) g_2 g_3,$$
$$I_2 D_t g_2 \cdot f = (I_3 - I_1) g_3 g_1,$$
$$I_3 D_t g_3 \cdot f = (I_1 - I_2) g_1 g_2$$

となり，双線形微分方程式が得られる．これらの方程式はゲージ変換

$$f(t) \to f(t)h(t), \qquad g_j(t) \to g_j(t)h(t) \qquad (j=1,\,2,\,3)$$

について不変である．

双線形差分方程式

次に双線形微分方程式を差分化する．双線形微分演算子 $D_t g_j \cdot f$ を差分演算子で置き換える．

$$D_t g_j \cdot f \to \Delta_t g_j \cdot f = [g_j(t+\delta)f(t) - g_j(t)f(t+\delta)]/\delta$$

ここで δ は時間の差分間隔である．この置き換えによって

$$\begin{aligned}
I_1[g_1(t+\delta)f(t) - g_1(t)f(t+\delta)] &= \delta(I_2 - I_3)g_2(t)g_3(t),\\
I_2[g_2(t+\delta)f(t) - g_2(t)f(t+\delta)] &= \delta(I_3 - I_1)g_3(t)g_1(t),\\
I_3[g_3(t+\delta)f(t) - g_3(t)f(t+\delta)] &= \delta(I_1 - I_2)g_1(t)g_2(t)
\end{aligned}$$

を得るが，これらの方程式はゲージ不変ではない．ゲージ不変な方程式は少し工夫して

$$\begin{aligned}
&I_1[g_1(t+\delta)f(t) - g_1(t)f(t+\delta)]\\
&\qquad = \delta(I_2 - I_3)[a_1 g_2(t+\delta)g_3(t) + b_1 g_2(t)g_3(t+\delta)],\\
&I_2[g_2(t+\delta)f(t) - g_2(t)f(t+\delta)]\\
&\qquad = \delta(I_3 - I_1)[a_2 g_3(t+\delta)g_1(t) + b_2 g_3(t)g_1(t+\delta)],\\
&I_3[g_3(t+\delta)f(t) - g_3(t)f(t+\delta)]\\
&\qquad = \delta(I_1 - I_2)[a_3 g_1(t+\delta)g_2(t) + b_3 g_1(t)g_2(t+\delta)]
\end{aligned} \tag{3.28}$$

となる．ここで a_j, b_j $(j=1,\,2,\,3)$ は条件 $a_j + b_j = 1$ を満たす定数である．さらに差分方程式の時間対称性を要請することによって $a_j = b_j = \dfrac{1}{2}$ と定まる．

コマの差分方程式

最後に双線形差分方程式 (3.28) を変数の逆変換によって通常の差分方程式に変換する．まず

$$g_j(t) = \omega_j(t)f(t) \qquad (j=1,\,2,\,3)$$

とする．これらの式を双線形差分方程式 (3.28) に代入すると

$$
\begin{aligned}
\omega_1(t+\delta)-\omega_1(t)&=\delta_1[\omega_2(t+\delta)\omega_3(t)+\omega_2(t)\omega_3(t+\delta)],\\
\omega_2(t+\delta)-\omega_2(t)&=\delta_2[\omega_3(t+\delta)\omega_1(t)+\omega_3(t)\omega_1(t+\delta)],\\
\omega_3(t+\delta)-\omega_3(t)&=\delta_3[\omega_1(t+\delta)\omega_2(t)+\omega_1(t)\omega_2(t+\delta)]
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

を得る．ここでのパラメータ $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ は (3.27) と同じである．これらの式が求めていたオイラーのコマの運動方程式の差分化である．この差分方程式を $\omega_1(t+\delta), \omega_2(t+\delta), \omega_3(t+\delta)$ について解くと，陽的な形

$$
\begin{aligned}
\omega_1(t+\delta)&=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\omega_1(t) & -\delta_1\omega_3(t) & -\delta_1\omega_2(t)\\ \omega_2(t) & 1 & -\delta_2\omega_1(t)\\ \omega_3(t) & -\delta_3\omega_1(t) & 1\end{vmatrix},\\
\omega_2(t+\delta)&=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1 & \omega_1(t) & -\delta_1\omega_2(t)\\ -\delta_2\omega_3(t) & \omega_2(t) & -\delta_2\omega_1(t)\\ -\delta_3\omega_2(t) & \omega_3(t) & 1\end{vmatrix},\\
\omega_3(t+\delta)&=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1 & -\delta_1\omega_3(t) & \omega_1(t)\\ -\delta_2\omega_3(t) & 1 & \omega_2(t)\\ -\delta_3\omega_2(t) & -\delta_3\omega_1(t) & \omega_3(t)\end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

に書き換えられる．$|\quad|$ は行列式を表す記号である．また，

$$
\Delta=\begin{vmatrix}1 & -\delta_1\omega_3(t) & -\delta_1\omega_2(t)\\ -\delta_2\omega_3(t) & 1 & -\delta_2\omega_1(t)\\ -\delta_3\omega_2(t) & -\delta_3\omega_1(t) & 1\end{vmatrix}
$$

とする．後で述べるように上の連立差分方程式には保存量が 2 つ存在する．したがって (3.29) すなわち (3.30) は陽的で可積分な差分方程式である．

注：この前提と結論は実のところ正しくない．連立した 2 つの 1 階差分方程式を考える．微分方程式では保存量が 1 個あれば可積分だが，差分方程式では保存量が 1 個あってもカオスを示すものが作れる [1]．正しくは次に説明する代数的エントロピーを使って「代数的エントロピーを計算すると数値的に 0 になるので可積分な差分方程式であると予想される」というべきである．

3.6 代数的エントロピー

与えられた差分方程式（マッピング）が可積分かどうかは重要な問題である．可積分と判定されると，保存量を計算したり厳密解を求めたりする試みは，たとえ困難であろうと意味のある行為になる．可積分性を判定するテストとして，**特異点閉じ込めテスト** (singularity confinement test) が有名である．しかし反例が発見された．このテストでは次の差分方程式

$$x_{n+1} + x_{n-1} = x_n + \frac{\alpha}{x_n^2} \tag{3.31}$$

を可積分と判定するが，数値計算の結果はカオスを示していることが Hietarinta と Viallet によって示された [22]．彼らは特異点閉じ込めテストに代わる**代数的エントロピー** (algebraic entropy) という概念を提唱し，差分方程式の代数的エントロピーが 0 であるか否かによって可積分か否かを判定する．代数的エントロピーによるテストでは上の方程式は可積分ではない．

代数的エントロピーの数学的定義は後にして，感覚的にどのようなものかを説明する．第 2 章で議論した再帰方程式

$$x_{n+1} = \frac{P(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})}{Q(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})}$$

の右辺は有理式（多項式 P, Q の比）である．マッピングを繰り返すと右辺の有理式は分子・分母の共通因子がお互いに打ち消しあって簡単になり，ついには初期値の x_0 に戻ったのである．この共通因子の打ち消しあいの度合いを正確に定義したのが代数的エントロピーである．打ち消しあいの度合いが最も激しいのが再帰方程式である．再帰方程式は超可積分系と呼べるほど保存量の数が多い．保存量の数は差分方程式の階数と同じ数だけあると予想されている．次に保存量の数が多いのが可積分系である．このとき打ち消しあいは適当に起こっている．保存量がほとんど無いのがカオス系である．このとき打ち消しあいはほとんど起こっていない．なお，打ち消しあいの頻度は多項式の次数の増大の速さで言い換えることができる．マッピングを繰り返すと上式右辺の分母・分子の多項式の次数は原則的には増大する．しかし，打ち消しあいが頻繁に起これば次数の増大が抑えられる．

以上の事実から代数的エントロピーを正確に定義する．差分方程式を n 回マッピングしたときの多項式の次数を d_n とする．このとき代数的エントロ

ピー E を次式で定義する．

$$E = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log d_n$$

「$E=0$ なら差分方程式は可積分であり，$E>0$ なら非可積分である．」というのが代数的エントロピーによる可積分性のテストである．現在までのところ反例は見つかっていない．

代数的エントロピーの計算法を Hietarinta と Viallet の方法にしたがって説明する．例として次の差分方程式

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}(c+x_n)} \tag{3.32}$$

をとりあげる．まずこの方程式を $x_{n-1}=y_n$, $x_n=z_n$ とおいて 1 階連立差分方程式

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= z_n, \\ z_{n+1} &= \frac{1}{y_n(c+z_n)} \end{aligned}$$

に書き換える．さらに変数変換

$$y_n = \frac{g_n}{f_n}, \qquad z_n = \frac{h_n}{f_n} \tag{3.33}$$

によってこの連立方程式を書き直すと

$$\begin{aligned} \frac{g_{n+1}}{f_{n+1}} &= \frac{h_n}{f_n}, \\ \frac{h_{n+1}}{f_{n+1}} &= \frac{f_n^2}{g_n(cf_n+h_n)} \end{aligned}$$

となる．さらに，これら方程式を連立同次方程式に書き直すために，分母を共通にする．

$$\begin{aligned} \frac{g_{n+1}}{f_{n+1}} &= \frac{h_n g_n(cf_n+h_n)}{f_n g_n(cf_n+h_n)}, \\ \frac{h_{n+1}}{f_{n+1}} &= \frac{f_n^3}{f_n g_n(cf_n+h_n)} \end{aligned}$$

この結果，次の連立方程式

$$f_{n+1} = f_n g_n (cf_n + h_n),$$
$$g_{n+1} = g_n h_n (cf_n + h_n),$$
$$h_{n+1} = f_n^3$$

が得られる．元の変数は y_n, z_n であり，変数変換 (3.33) によって f_n, g_n, h_n の射影空間に移ったので，上の連立方程式の解を次のように共通因子で乗除しても y_n, z_n の値は変わらない．

$$\{f_n, g_n, h_n\} \to \{f_n/\lambda, g_n/\lambda, h_n/\lambda\}$$

したがって連立方程式の解を求める手順は次のようになる．ある初期値 f_0, g_0, h_0 を与えて，このマッピングを実行し（連立方程式を解き），f_1, g_1, h_1 を求め，それを共通因子で割ったものを次の初期値とする．この過程を繰り返して得られた解 f_n, g_n, h_n はどれも f_0, g_0, h_0 の多項式となる．そして，この多項式（f_n, g_n, h_n のどれでもよい）の次数 d_n を求める．

計算機を使って次数 d_n を求めると方程式 (3.32) の場合

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 3, \quad d_2 = 5, \quad d_3 = 8, \quad d_4 = 12,$$
$$d_5 = 17, \quad d_6 = 23, \quad d_7 = 29, \quad d_8 = 39, \quad \ldots$$

となる．d_n は $n < 9$ のとき $d_n < n^2 + 3$ であるので，代数的エントロピー E は

$$E < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log (n^2 + 3) = 0$$

と推定される．したがって差分方程式 (3.32) は可積分であると推定する．(3.32) はパラメータ c が 0 のとき周期 3 の再帰方程式になるが，このとき d_n は

$$1, \quad 3, \quad 3, \quad 1, \quad 1, \quad 3, \quad 3, \quad 1, \quad \ldots$$

となり，やはり周期 3 を示す．

次に同じ手順で前出の方程式 (3.31)，すなわち

$$x_{n+1} + x_{n-1} = x_n + \frac{\alpha}{x_n^2} \tag{3.34}$$

の d_n を計算すると

$$1, \quad 3, \quad 9, \quad 27, \quad 73, \quad \ldots$$

となり，急激に増大する．Hietarinta と Viallet によると，この場合

$$E = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log d_n = \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

と理論的に決定されるそうである．

代数的エントロピーは理論的には非常に面白い概念であるが，一般に n が大きいときの d_n の値を計算するのは非常に難しい．筆者（広田）の手持ちの計算機では $n=5$ 程度までしか計算できない．これだけのデータで E が 0 かどうかを確実に判定するのは不可能である．したがって代数的エントロピーは実際の判定法として役に立たないのではないかという懸念があった．しかし，この欠点は以下の改良によりある程度まで克服することができる．

木村欣司君（早大理工修士 2 年，2000 年当時）は代数的エントロピーの簡便な計算法を発見した．発想は簡単である．マッピングよる有理式の分子・分母の打ち消し合いだけに注目すると，打ち消しあいを調べるために射影空間に移る必要はなく，元の変数 x_n でも十分である．また初期値も $x_{-1}=f$, $x_0 =$ 任意の数値（たとえば 2）のように簡単なものを選んでも打ち消し合いの度合いは変わらないはずである．

この簡便法を使って d_n を計算すると

(i)　(3.32) の場合，数列

$$0, 0, 1, 2, 2, 3, 6, 7, 9, 12, 15, 17, 20, 25, 28, 32, 37, \dots$$

が得られ，d_n は n の多項式のオーダで増大しており，可積分であると推定される．

(ii)　(3.34) の場合，数列

$$0, 1, 3, 8, 23, 61, 160, 421, \dots$$

が得られ，d_n の比は $d_{n+1}/d_n > 2$ $(n<7)$ であり，d_n は 2^n 以上のオーダで増大しており非可積分であると推定される．

矢作秀之君（早大理工修士 1 年，2000 年当時）はこの簡便法を使って

$$x_{n+2}x_{n-1} = \frac{P(x_n, x_{n+1})}{Q(x_n, x_{n+1})}$$

の形の 3 階差分方程式を研究し，9 個の差分方程式が可積分であると推定した．その後，これらの差分方程式はすべて 2 個の独立な保存量をもつことが示された [23].

3.7　保存量の計算法

非線形差分方程式の保存量を計算する一般的方法は未だ確定していない．というよりほとんど研究されていないというのが現状である．この節で説明するのは，有理式（多項式 P, Q の比）によるマッピング（$k+1$ 階差分方程式）

$$x_{n+1} = \frac{P(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})}{Q(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})} \tag{3.35}$$

の保存量 $H(n)$ も次式のように有理式（多項式 A, B の比）で表されるという作業仮設に基礎を置く方法である [23].

$$H(n) = \frac{A(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})}{B(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})} \tag{3.36}$$

簡単のため $A(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})$，$B(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})$ をそれぞれ $A(n)$, $B(n)$ と記すことにする．作業仮設を認めて保存量を求めるなら，まず多項式 $A(n)$, $B(n)$ を変数 $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}$ の M 次式と仮定し，その一般形を次式のようにおく．

$$A(n) = A_0 + A_1 x_n + A_2 x_{n-1} + \cdots + A_{N-1} x_{n-k+1}^M + A_N x_{n-k}^M,$$
$$B(n) = B_0 + B_1 x_n + B_2 x_{n-1} + \cdots + B_{N-1} x_{n-k+1}^M + B_N x_{n-k}^M$$

そして (3.35) を使って，条件式

$$H(n+1) - H(n) = 0 \tag{3.37}$$

が成立するように $A(n)$, $B(n)$ の係数 A_j, B_j を決定すればよい．

$A(n)$, $B(n)$ の決定方法には主として 2 通りある．

(i)　直接法

この方法では多項式 $A(n)$, $B(n)$ を (3.37) に直接代入する．係数 A_j, B_j に対する非線形代数方程式が得られるので，これを解いて保存量を求

める．直接法は推定した保存量の形が比較的簡単で，非線形代数方程式が解きやすい（たとえば数式処理システム Reduce の groebner 関数や solve 関数を使って解ける）ときに有効である．

(ii)　間接法

この方法はまず保存量 (3.36) を

$$c_0 + c_1 x_n + c_2 x_{n-1} + \cdots + c_{N-1} x_{n-k+1}^M + c_N x_{n-k}^M = 0, \qquad (3.38)$$

$$c_j = A_j - H(n) B_j \qquad (0 \le j \le N)$$

と書き直す．A_j, B_j は定数であり，$H(n)$ は n に依存しない保存量である．したがって c_j も n に依存せず，保存量となる（ただしすべてが独立な保存量とは限らない）．

(3.38) を別な視点から眺める．この方程式は c_j $(0 \le j \le N)$ に対する 1 次方程式であり，任意の n に対して成立している．そこで $N+1$ 個の異なった n に対する (3.38) を考える．この連立 1 次方程式が解をもつ条件は c_j の係数が作る $N+1$ 次の行列式のランクが N 以下のときである．このとき保存量である c_j が連立 1 次方程式の解として決定される．

以下ではまず直接法の例題として差分化されたオイラーのコマの保存量を求める．次に間接法の例題として (3.32) および (3.24) の保存量を求める．

直接法による保存量の計算

直接法を使って次のオイラーのコマのマッピングの保存量を求める．

$$\omega_1(t+\delta) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \omega_1(t) & -\delta_1\omega_3(t) & -\delta_1\omega_2(t) \\ \omega_2(t) & 1 & -\delta_2\omega_1(t) \\ \omega_3(t) & -\delta_3\omega_1(t) & 1 \end{vmatrix},$$

$$\omega_2(t+\delta) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & \omega_1(t) & -\delta_1\omega_2(t) \\ -\delta_2\omega_3(t) & \omega_2(t) & -\delta_2\omega_1(t) \\ -\delta_3\omega_2(t) & \omega_3(t) & 1 \end{vmatrix}, \qquad (3.39)$$

$$\omega_3(t+\delta) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & -\delta_1\omega_3(t) & \omega_1(t) \\ -\delta_2\omega_3(t) & 1 & \omega_2(t) \\ -\delta_3\omega_2(t) & -\delta_3\omega_1(t) & \omega_3(t) \end{vmatrix}$$

ここで

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\delta_1\omega_3(t) & -\delta_1\omega_2(t) \\ -\delta_2\omega_3(t) & 1 & -\delta_2\omega_1(t) \\ -\delta_3\omega_2(t) & -\delta_3\omega_1(t) & 1 \end{vmatrix}$$

である．

$\delta \to 0$ の極限でオイラーの微分方程式には以下の 2 つの保存量

$$H_1(t) = I_1\omega_1(t)^2 + I_2\omega_2(t)^2 + I_3\omega_3(t)^2,$$
$$H_2(t) = I_1^2\omega_1(t)^2 + I_2^2\omega_2(t)^2 + I_3^2\omega_3(t)^2$$

があるので，オイラーの差分方程式の保存量として有理式

$$H(t) = \frac{a_1\omega_1(t)^2 + a_2\omega_2(t)^2 + a_3\omega_3(t)^2}{1 + b_1\omega_1(t)^2 + b_2\omega_2(t)^2 + b_3\omega_3(t)^2}$$

を仮定する．この式を

$$H(t+\delta) - H(t) = 0$$

に代入し，マッピング (3.39) を使うと，$\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$ の係数 a_j, b_j に対する 22 個の非線形代数方程式が得られる．しかしこれら 22 個の代数方程式はグレブナー基底の計算によって 3 個の代数方程式

$$a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + a_3\delta_3 = 0,$$
$$a_2(b_1\delta_1 + b_2\delta_2 + b_3\delta_3 + \delta_1\delta_2\delta_3) = 0,$$
$$a_3(b_1\delta_1 + b_2\delta_2 + b_3\delta_3 + \delta_1\delta_2\delta_3) = 0$$

に帰着する．この代数方程式の特別な解として

$$a_1 = -\frac{a_2\delta_2 + a_3\delta_3}{\delta_1}, \qquad b_1 = -\delta_2\delta_3, \qquad b_2 = 0, \qquad b_3 = 0$$

を選ぶと

$$H(t) \propto \frac{(a_2\delta_2 + a_3\delta_3)\omega_1(t)^2 - a_2\delta_1\omega_2(t)^2 - a_3\delta_1\omega_3(t)^2}{1 - \delta_2\delta_3\omega_1(t)^2}$$

が得られる．さらに残ったパラメータを $a_2 = I_2$, $a_3 = I_3$ と選ぶと第一の保存量

$$H_1(t) = \frac{I_1\omega_1(t)^2 + I_2\omega_2(t)^2 + I_3\omega_3(t)^2}{1 - \delta_2\delta_3\omega_1(t)^2}$$

が得られ，$a_2 = I_2^2$, $a_3 = I_3^2$ と選ぶと第二の保存量

$$H_2(t) = \frac{I_1^2\omega_1(t)^2 + I_2^2\omega_2(t)^2 + I_3^2\omega_3(t)^2}{1 - \delta_2\delta_3\omega_1(t)^2}$$

が得られる．この2つが求めたかったオイラーのコマの差分方程式の保存量である．なお，非線形方程式を解く数式処理の solve 機能は完全ではないので解が正しいかどうかチェックする必要があるが，今の場合は正しい答を出している．

間接法による保存量の計算

間接法による保存量の計算の例題として，まず (3.32)，すなわち

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}(c + x_n)} \tag{3.40}$$

を取り上げる．保存量 $H(n)$ の形を決めるために上式についての以下の性質を考慮に入れる．

(i)　(3.40) は時間反転に対する対称性

$$x_{n+1} \leftrightarrow x_{n-1}$$

がある．したがって保存量は x_n と x_{n-1} の対称式である．

(ii)　(3.40) は解の一意性を保証する．したがって3乗の項 x_n^3 や x_{n-1}^3 などは保存量から除外する．

すると保存量 $H(n)$ として

$$H(n) = \frac{A_0p_0(n) + A_1p_1(n) + \cdots + A_5p_5(n)}{B_0p_0(n) + B_1p_1(n) + \cdots + B_5p_5(n)} \tag{3.41}$$

が考えられる．ここで

$$p_0(n) = 1, \qquad p_1(n) = x_n + x_{n-1}, \qquad p_2(n) = x_nx_{n-1},$$
$$p_3(n) = x_n^2 + x_{n-1}^2, \qquad p_4(n) = x_n^2x_{n-1} + x_nx_{n-1}^2, \qquad p_5(n) = x_n^2x_{n-1}^2$$

である．(3.41) を書き直すと

$$c_0p_0(n) + c_1p_1(n) + c_2p_2(n) + \cdots + c_5p_5(n) = 0$$

となる．ここで

$$c_j = A_j - H(n)B_j \qquad (0 \le j \le 5)$$

である．

前にも述べたが，すべての c_j は保存量である．任意の n に対して $c_0 \sim c_5$ は次の連立 1 次方程式

$$\begin{aligned}
&c_0 p_0(n) + c_1 p_1(n) + c_2 p_2(n) + \cdots + c_5 p_5(n) = 0, \\
&c_0 p_0(n+1) + c_1 p_1(n+1) + c_2 p_2(n+1) + \cdots + c_5 p_5(n+1) = 0, \\
&\qquad \vdots \\
&c_0 p_0(n+5) + c_1 p_1(n+5) + c_2 p_2(n+5) + \cdots + c_5 p_5(n+5) = 0
\end{aligned}$$

を満たす．もし (3.41) の仮定が正しければ，係数の作る行列式は以下のように 0 となる．

$$\det \begin{pmatrix} p_0(n) & p_1(n) & p_2(n) & \cdots & p_5(n) \\ p_0(n+1) & p_1(n+1) & p_2(n+1) & \cdots & p_5(n+1) \\ p_0(n+2) & p_1(n+2) & p_2(n+2) & \cdots & p_5(n+2) \\ p_0(n+3) & p_1(n+3) & p_2(n+3) & \cdots & p_5(n+3) \\ p_0(n+4) & p_1(n+4) & p_2(n+4) & \cdots & p_5(n+4) \\ p_0(n+5) & p_1(n+5) & p_2(n+5) & \cdots & p_5(n+5) \end{pmatrix} = 0 \qquad (3.42)$$

次にマッピング (3.40) を使って，この行列式が 0 になるかどうかをチェックする．(3.40) を使うと行列式の成分はすべて x_n, x_{n-1} の有理式として表現されるが，マッピングの回数が多いと数式の表現が爆発して計算不能になる．実際的には，初期値 x_0, x_1 を中心に n の正の方向へ 2 回，負の方向へ 3 回マッピングをする．これにより確かに行列式の値が 0 なっていることを確認できる．

次に，この行列式のランクを計算する．ランクは 5 すなわち 6 未満になるので，連立 1 次方程式の解 $c_0 \sim c_5$ は存在する．結果は比例定数を無視すると

$$c_0 = 0, \qquad c_1 = \text{任意定数}, \qquad c_2 = \frac{x_1^2 x_0^2 + c(x_1^2 x_0 + x_1 x_0^2) + x_1 + x_0}{x_1 x_0},$$

$$c_3 = 0, \qquad c_4 = c, \qquad c_5 = 1$$

となる．したがってマッピング (3.40) の保存量 H は

$$H(n)=\frac{x_n^2x_{n-1}^2+c(x_n^2x_{n-1}+x_nx_{n-1}^2)+x_n+x_{n-1}}{x_nx_{n-1}}$$

と表される．

次に，差分化された非線形振動子を特別な場合として含む (3.24)，すなわち

$$x_{n+1}=\frac{a_0+a_1x_n-x_{n-1}(b_0+b_1x_n)}{b_0+b_1x_n-x_{n-1}(c_0+c_1x_n)}$$

の保存量を求める．

解を求める手順は前の例と全く同じである．差分方程式の性質より

$$H(n)=\frac{A_0p_0(n)+A_1p_1(n)+\cdots+A_5p_5(n)}{B_0p_0(n)+B_1p_1(n)+\cdots+B_5p_5(n)}$$

となり，連立 1 次方程式は

$$C_0+C_1p_1(n)+C_2p_2(n)+\cdots+C_5p_5(n)=0$$

となる．

問題は (3.42) の左辺の行列式に対応するものが 0 になるかどうかである．たとえば筆者が使っているノート型計算機で数式処理ソフトを動かすと，マッピングの式が複雑なので計算の途中で式が爆発して計算不能となる．そこで方程式に含まれる任意パラメータを以下のような数値に置き換えて計算する（これらの数値に特別の意味はない）．

$$a_0=1,\quad a_1=2,\quad b_0=3,\quad b_1=5,\quad c_0=2,\quad c_1=3$$

すると，すべての C_j が求まるが，最も簡単なのは C_5 より得られる保存量

$$H(n)=\frac{21p_4(n)-35p_3(n)-22p_2(n)+25p_1(n)-20}{20p_5(n)+p_4(n)-15p_3(n)-2p_2(n)+5p_1(n)}$$

である．この結果を利用すると，方程式のパラメータが任意のときの保存量は

$$H(n)=\frac{\alpha_4p_4(n)+\alpha_3p_3(n)+\alpha_2p_2(n)+\alpha_1p_1(n)+\alpha_0}{\beta_5p_5(n)+\beta_4p_4(n)+\beta_3p_3(n)+\beta_2p_2(n)+\beta_1p_1(n)}$$

と推定できる．未知のパラメータの数が少なくなったので直接法を使って係数 α_j, β_j を決定すれば保存量を計算することができる（結果は省略する）．

第4章

超離散化

4.1　マックス–プラス代数

実数 A, B に関する2項演算 $\max(A, B)$ を，A, B のうち大きい方の値を答える演算であるとしよう．ただし，$A = B$ のときは $\max(A, B) = A(= B)$ とする．この max 演算について，以下の法則が成り立つ．

$$\begin{aligned} &\max(A, B) = \max(B, A) && \text{（交換法則）} \\ &\max(A, \max(B, C)) = \max(\max(A, B), C) && \text{（結合法則）} \end{aligned} \tag{4.1}$$

交換法則は明らかであろう．結合法則は A, B, C の大きさについて場合分けを行えば証明できる．そしてこれらの法則から，たとえば

$$\begin{aligned} \max(A, \max(B, \max(C, D))) &= \max(C, \max(A, \max(D, B))) \\ &= \max(\max(D, C), \max(B, A)) \end{aligned} \tag{4.2}$$

が成り立つことを証明できる．すなわち「複数の数に対する max 演算は，数の並び方や max 演算の順序にかかわりなく成立する」のである．このことから，我々が + について $a+b+c+d$ と書いたり，× について $a \times b \times c \times d$ と書くように，$\max(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ という記法を採用し，順序によらず A_1, $A_2, \ldots, A_n$ を比較してそれらのうちの最大値を答える演算であるとする．すると，(4.2) は $\max(A, B, C, D)$ と表すことができる．

問 4.1 (4.1) の結合法則を場合分けによって証明せよ．

問 4.2 $\max(A, -A) = |A|$ を示せ．

問 4.3 (4.2) を交換・結合法則だけを用いて証明せよ．

問 4.4 $\max(\max(0, x), -\max(x, -x)) \geq 0$ を示せ．

さらに別の2項演算を導入しよう．なじみ深い「和」$+$ である．この演算も交換法則 $A + B = B + A$, 結合法則 $A + (B + C) = (A + B) + C$ を満たす．さて，max と $+$ との興味深いつながりは，両者を用いると分配法則

$$A + \max(B, C) = \max(A + B, A + C) \tag{4.3}$$

が成立することである．

問 4.5 (4.3) を場合分けによって証明せよ．

以上のことから，max と $+$ が，通常の $+$ と積 $\times$ との関係に対応することがわかる．今まで示してきた法則を対比させて並べてみよう．

	$(\max, +)$	$(+, \times)$
交換法則	$\max(A, B) = \max(B, A)$ $A + B = B + A$	$a + b = b + a$ $a \times b = b \times a$
結合法則	$\max(A, \max(B, C)) = \max(\max(A, B), C)$ $A + (B + C) = (A + B) + C$	$a + (b + c) = (a + b) + c$ $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
分配法則	$A + \max(B, C) = \max(A + B, A + C)$	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

分配法則より，max が加法, $+$ が乗法の役割を果たしていることがわかる．このことから，加法 max と乗法 $+$ という2つの基本演算によって構成される

代数系を考えることができる．そのような代数系は通称**マックス–プラス代数** (max-plus algebra) と呼ばれている [24,26]．マックス–プラス代数は代数の公理を完全には満たさないが，便宜上この呼び名を以降でも用いることにする．

上の対応表から，$(+, \times)$ だけで作られるさまざまな公式の $+$ を max に，$\times$ を $+$ に置き換えれば，マックス–プラス代数の公式が得られる．

ところでマックス–プラス代数では，スカラー倍に注意する必要がある．たとえば $a + a = 2a$ に対応して $\max(A, A) = 2 + A$ とすると，$\max(A, A) = A$ なので明らかに誤りである．この原因は，元の公式の $2a$ に含まれている 2 というスカラー定数をそのままマックス–プラス代数に流用したためである．実は，今まで演算の対応関係は考えたが，数同士の対応はまだ考えていない．$a + a = 2a$ の 2 という数はマックス–プラス代数に翻訳すると 0 となる．このあたりの状況は 4.3 節の超離散化のところで明らかになる．大事なことは，マックス–プラス代数の演算に慣れていないうちは $(+, \times)$ の公式を自動的に翻訳するのは危険であると認識し，マックス–プラス代数の中で公式を新たに作り上げていくことである．

問 4.6 (i) $\max(A, B) + \max(C, D) = \max(A + C, A + D, B + C, B + D)$ を示せ．
(ii) 上の公式に対応する $(+, \times)$ の公式を示せ．

問 4.7 以下を示せ．
(i) $p \geq 0$ のとき $p \max(A, B) = \max(pA, pB)$
(ii) $\max(2A, A + B, 2B) = 2 \max(A, B)$
(iii) $\max(3A, 2A + B, 3B) = 3 \max(A, B)$

問 4.8 $aaa = a^3$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ に対応するマックス–プラス代数の公式を示せ．

4.2 単位元・逆元

前節でマックス–プラス代数は加法 max と乗法 $+$ にもとづく代数系であることを述べた．そこで演算の基本的性質を調べていこう．まず，乗法 $+$ に関

する単位元は 0 であり，逆元は $-$ を用いて

$$A+B=0 \longleftrightarrow B=-A$$

と計算できる．つまり，マックス–プラス代数の除法は $-$ ということになる．

次に加法 max であるが，こちらは少々複雑である．加法に関する単位元すなわち零元は，任意の A に対して

$$\max(A,X)=A$$

が成り立つような X のことである．これは $X=-\infty$ とすれば成立するので，零元は $-\infty$ となる．ところが A の逆元は

$$\max(A,Y)=-\infty$$

を満たす Y であり，これは $A=-\infty$ の場合以外は存在しない．このことから，減法に相当する max の逆演算がうまく定義できない．次の問を解いてこれを確認しよう．

問 4.9 (i) $\max(A,3)=5$, $\max(A,3)=3$, $\max(A,3)=-1$ を満たす A をそれぞれ求めよ．
(ii) $\max(A,B)=C$ について，B, C がどのような場合にこの方程式を満たす A が存在するか．またそのとき A はどのような値になるか．

max の逆演算がないことから，マックス–プラス代数の方程式が解けるためには制約条件が必要となる．したがって，線形微分方程式の一般解法のような線形理論を構築することが難しく，むしろ後で説明する非線形方程式（の特別なタイプ）の方がマックス–プラス代数とずっとしっくりいく．

なお，A と B の小さい方を答える $\min(A,B)$ という演算がある．min を加法，$+$ を乗法と考えても交換・分配法則が成り立つ．一方，公式

$$\min(A,B)=-\max(-A,-B) \tag{4.4}$$

によって min はいつでも max に書き換えることができる．マックス–プラス代数の中で $-$ は除法・逆元として常に許される操作なので，$(\max,+)$ と $(\min,+)$

の基本演算はどちらか片方だけ考えればよく，本書では (max, +) の方を採用する．ただし，以降で表現の簡潔性のために min を補助的に用いることもある．

問 4.10 (4.4) を場合分けによって証明せよ．

問 4.11 $\min(x, y) = x + y - \max(x, y)$ を示せ．

問 4.12 $\min(\max(0, x), \max(1, -x))$ の値を x によって場合分けして答えよ．

■ **離散事象システムとマックス–プラス代数**

たとえば工場でさまざまな部品が集められ製品として組み立てられていく状況を考えよう．そこでは同時進行する複数の製造過程のタイミングを合わせながら全体を統括制御する必要があり，難しい数学的問題を提示している．このような状況を記述し解析するために，**離散事象システム** (discrete event system) というモデルが存在し，そのモデルの図的表現手段として**ペトリネット** (petri net) と呼ばれるものがある [24–26].

ペトリネットのもともとの表現は有向グラフによるものであるが，その中であるクラスに属するものはマックス–プラス代数による数式で表現が可能である．本文中でもいくつかの離散ゲームがマックス–プラス代数で表現されているように，この代数はどうも人間くさいものと親和性が高いように思う．しかしながら，その背後に微分方程式という自然現象となじみが強い数学も超離散化を通じて控えており，美しい数学的仕組みの普遍性 (universality) が感じられる．

4.3 超離散化

極限に関する次の公式がある．

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}) = \max(A, B) \tag{4.5}$$

左辺の極限 $\varepsilon \to +0$ は ε を正の範囲で 0 に限りなく近づけることを意味する．この公式を場合分けによって確認してみよう．まず $A > B$ のとき

$$左辺 = \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log\{e^{A/\varepsilon}(1 + e^{(B-A)/\varepsilon})\} = A + \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(1 + e^{(B-A)/\varepsilon})$$

となり，$B - A < 0$ なので答は A となる．$A < B$ のときは式の対称性から答が B となるのは明らかであろう．$A = B$ のときは，

$$左辺 = \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log 2e^{A/\varepsilon} = A + \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log 2 = A$$

となる．以上の場合分けをまとめると確かに (4.5) の左辺と右辺は等しい．

問 4.13 以下の式を max で表せ．

(i) $\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(1 + e^{A/\varepsilon})$　　(ii) $\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(1 + 2e^{(A-1)/\varepsilon})$

(iii) $\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{2A/\varepsilon})$　　(iv) $\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log \dfrac{e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}}{1 + e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}}$

(v) $\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log \dfrac{(2 + e^{A/\varepsilon})(e^{A/\varepsilon} + e^{2B/\varepsilon})}{(3 + e^{(A+B)/\varepsilon})^2}$

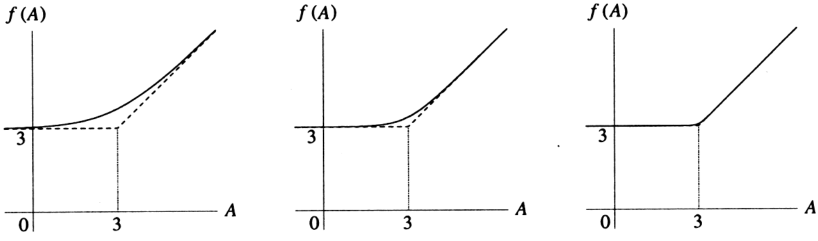
問 4.14 $\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(e^{A_1/\varepsilon} + e^{A_2/\varepsilon} + \cdots + e^{A_n/\varepsilon}) = \max(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ を示せ．

問 4.15 $\lim_{\varepsilon \to -0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon})$ はどのような結果になるか．($\varepsilon \to -0$ に注意．)

(4.5) で左辺の極限が右辺に収束していく様子をグラフで確認してみる．$B = 3$ の場合に $\varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{3/\varepsilon})$ を A の関数 $f(A)$ とみなし，そのグラフを描いたのが図 4.1 である．比較のため $\max(A, 3)$ のグラフを点線で示している．ε が指数の分母に入っているので，ε を小さくしていくと $f(A)$ が急速に $\max(A, 3)$ に近づくのがわかる．

今度は方程式に (4.5) の公式を応用してみよう．まず手始めに

$$a + b = c$$



$\varepsilon = 1$ $\varepsilon = 0.5$ $\varepsilon = 0.01$

図 4.1 $f(A) = \varepsilon\log(e^{A/\varepsilon} + e^{3/\varepsilon})$ のグラフ

という方程式を考える．このとき，ε を正の任意定数とし，変数それぞれに $a = e^{A/\varepsilon}$, $b = e^{B/\varepsilon}$, $c = e^{C/\varepsilon}$ という変数変換をほどこす．ただし，このような変換が実数の範囲で成り立つためには，a, b, c すべてが正であるという条件が必要である．変換を代入すると

$$e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon} = e^{C/\varepsilon} \tag{4.6}$$

となり，両辺に $\varepsilon\log$ をほどこすと $\varepsilon\log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}) = C$ となる．そして $\varepsilon \to +0$ の極限を考えると，$\max(A, B) = C$ が得られる．以上の手順をまとめて表すと，以下のようになる．

$$\begin{aligned} a + b = c \ \xleftrightarrow[\substack{a = e^{A/\varepsilon}, b = e^{B/\varepsilon} \\ c = e^{C/\varepsilon}}]{\text{変数変換}} \ & \varepsilon\log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}) = C \\ \xrightarrow[\varepsilon \to +0]{\text{極限}} \ & \max(A, B) = C \end{aligned} \tag{4.7}$$

ただし，小文字と大文字の変数同士の値の対応を考えると奇妙なことになる．たとえば $a = \lim_{\varepsilon\to+0} e^{A/\varepsilon}$ なので，$A > 0$, $A = 0$, $A < 0$ に応じて $a = +\infty, 1, 0$ となる．逆に $A = \lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon\log a$ なので，a が正の有限値なら $A = 0$ となってしまう．これを読み解くには，(4.6) が最初にありきと考えればよい．この式を変数変換で単に書き換えたのが $a+b=c$ であり，$\varepsilon \to +0$ の極限で A, B, C の間に成り立つのが $\max(A, B) = C$ なのである．むしろ重要なのは，$a + b = c$ という和の等式が，変数変換と極限によって $\max(A, B) = C$ という max の等式に対応するという代数的な観点である．

上と同様のことを積・商について行うと，

$$\begin{aligned} a \cdot b = c &\longleftrightarrow \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} \cdot e^{B/\varepsilon}) = C \longrightarrow A + B = C \\ a/b = c &\longleftrightarrow \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon}/e^{B/\varepsilon}) = C \longrightarrow A - B = C \end{aligned} \tag{4.8}$$

となる．ただし，どちらの場合も $\varepsilon \to +0$ の極限をとってもとらなくても最右辺を導くことができる．

(4.7), (4.8) の両端の式を並べると，通常の四則演算とマックス–プラス代数の基本演算との対応が現れる．ということは，四則演算で構成された方程式の変数に $\exp(A/\varepsilon)$ 型の変換を行い，$\varepsilon \to +0$ の極限をとってマックス–プラスの方程式を得るという方程式の変換手続きを考えることができる．この手続きを**超離散化** (ultradiscretization) あるいは**超差分化**という [6,27–29]．この用語の由来を一言で述べるなら「従属変数の離散化による方程式の全変数離散化」ということになる．ただし，その意味を理解するには「微分方程式 → 差分方程式 → 超離散方程式」という一連のシナリオがある方がわかりやすい．そこで，次章の 5.3 節「超離散バーガーズ方程式」でこの用語について説明する．

なお，差については

$$a - b = c \longleftrightarrow \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} - e^{B/\varepsilon}) = C$$

とすると，$A = B$ $(a = b,\ c = 0)$ の場合に発散が生じ，$A < B$ の場合に log の中身が負になる．すなわち変数変換・極限に問題が生じる．引き算の超離散化がうまくできないのは，マックス–プラス代数の加法 max の逆演算が定義できないという前節の結果と符合している．

問 4.16　以下の式について $a = e^{A/\varepsilon}$, $b = e^{B/\varepsilon}$, $c = e^{C/\varepsilon}$ と変換して $\varepsilon \to +0$ の極限をとる．そのとき C を A, B の式で表せ．

(i) $c = 1/(a + b)$　　(ii) $c = a + a^2 + 2b$

(iii) $c = (a + b)(a^2 + b^2)$

問 4.17 $f(x) = \varepsilon \log(e^{(-x+2)/\varepsilon} + e^{(x+1)/\varepsilon})$ とする．
(i) $f(x)$ のグラフの概形を描き最小値を求めよ．
(ii) $g(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(x)$ を max で表し，グラフを描け．

4.4 再帰方程式の超離散化

超離散化を第 2 章で登場した再帰方程式に適用してみよう．ただし，前節で述べたように負の問題が生じる場合はうまく超離散化ができない．たとえば (2.10)，すなわち

$$x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}$$

の超離散化を試みる．変数変換 $x_n = e^{X_n/\varepsilon}$ を代入すると

$$X_{n+1} = \varepsilon(\log(e^{X_n/\varepsilon} - 1) - \log(e^{X_n/\varepsilon} + 1))$$

となるが，$\varepsilon \to +0$ で右辺第 1 項の評価が難しい．これを回避するために，式を整理して

$$1 + x_{n+1}(x_n + 1) = x_n$$

とすると，超離散化によって

$$\max(0, X_{n+1}, X_n + X_{n+1}) = X_n \tag{4.9}$$

という式が得られるが，これでは X_n から X_{n+1} を一意的に決めることができない．また，x_n の解は常に周期 4 の周期解になるが，解に必ず負の値を含むので，そもそも変数変換自身に無理がある．以上のような問題に対して，うまく初期値を選び方程式の形を工夫することによって解決できる場合もあるが，一般的な処方箋はまだ見つかっていない．

問 4.18 $X_n = \alpha$ とするとき，(4.9) を満たす X_{n+1} を α によって場合分けして求めよ．

そこで，ここで扱う再帰方程式については，初期値や定数に条件を設ければ解の正値性を保証でき，超離散化後も解の一意性を保証できるもののみを取り

扱うことにする．そのような例として周期 5 の 2 階非線形差分方程式 (2.17)，すなわち

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{x_{n-1}} \tag{4.10}$$

をまず取りあげよう．この式では，初期値の x_0, x_1 が正であるなら x_n も常に正となる．そこで $x_n = e^{X_n/\varepsilon}$ とし，$\varepsilon \to +0$ の極限をとると，超離散版の方程式

$$X_{n+1} = \max(0, X_n) - X_{n-1} \tag{4.11}$$

が得られる．この方程式は再帰方程式になっているだろうか．X_0, X_1 を適当な値にとり，その後の X_n を計算したものを以下の表に示す．

X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	2	1	-1	-1	1	2
-3	5	8	3	-5	-3	5
$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

表の 3 通りの初期値すべてに対して周期 5 で値が元に戻っており，元の差分方程式と同じ性質を示している．では，一般の初期値に対してはどうであろうか．このことを確かめるために，まず**相平面**での解軌道を調べてみる．

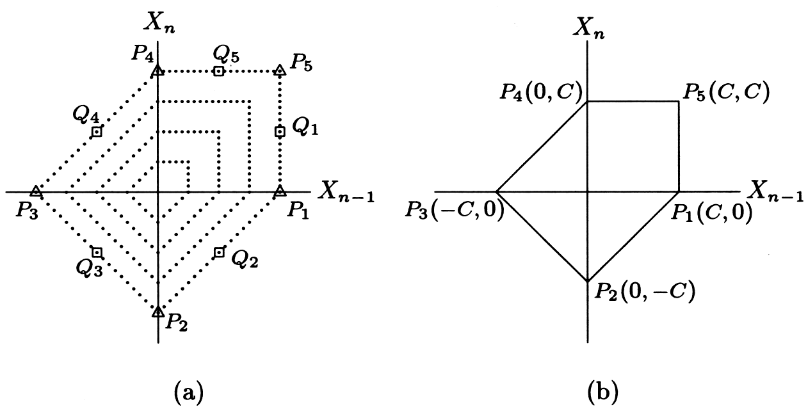


図 **4.2**　(4.11) の解軌道

図 4.2 (a) は横軸に X_{n-1}，縦軸に X_n をとり，初期値 (X_0, X_1) から計算される (X_1, X_2), (X_2, X_3), ... を，初期値をいろいろ変えてプロットしたもので

ある．すると，たとえば点 P_1 を初期値にとると，$P_2 \sim P_5$ まで計算された後，再び P_1 に戻る．Q_i も同様である．そしていくつかの解の点をうまく集めると，図のような五角形が現れる．

五角形が現れる理由は以下の通りである．まず，(4.11) は X_n の正負によって写像が変わる．

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - X_{n-1} & (X_n \geq 0) \\ -X_{n-1} & (X_n \leq 0) \end{cases}$$

これを相平面内の点 (X_{n-1}, X_n) から (X_n, X_{n+1}) への写像の形で書くと

$$\begin{pmatrix} X_n \\ X_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix} & (X_n \geq 0) \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix} & (X_n \leq 0) \end{cases}$$

となる．ということは，相平面で上半平面か下半平面のどちらかに含まれる任意の線分は，線形写像によってやはり線分に写像される．線分の端点は端点に写像される．また，C を正の数として点 $(C, 0)$ は図 4.2 (b) のように

$$P_1(C,0) \ \to \ P_2(0,-C) \ \to \ P_3(-C,0) \ \to \ P_4(0,C) \ \to \ P_5(C,C) \ \to \ P_1(C,0)$$

と周期 5 で戻ってくる．すると，隣り合う点同士を結んでできる五角形の辺は，それぞれ上半平面か下半平面のどちらかに含まれているので，辺も線形写像によって以下のように移される．

$$P_1P_2 \ \to \ P_2P_3 \ \to \ P_3P_4 \ \to \ P_4P_5 \ \to \ P_5P_1 \ \to \ P_1P_2$$

線形写像の性質から，辺を一定の比で内分する点は写像後も同じ比で内分する点に移る．ということは，辺 P_1P_2 上の任意の点も周期 5 で元に戻ってくる．

さらに (4.11) では F_n という解があるとすると，それを正の定数倍した αF_n も解になるという性質がある．なぜならば F_n を (4.11) に代入し両辺を α 倍すると

$$\alpha F_{n+1} = \alpha(\max(0, F_n) - F_{n-1}) = \max(0, \alpha F_n) - \alpha F_{n-1}$$

となるからである．このことから，図 4.2 (b) のような解の軌道が 1 つあれば，原点を中心にその軌道を拡大縮小した相似図形もやはり軌道になってい

る．以上のことより，(4.11) の任意の初期値の解は五角形上を周期 5 でぐるぐる回ることが示せた．

なお，今の方程式の場合に相平面の原点は特別な点である．$(X_{n-1}, X_n) = (0,0)$ とすると $X_{n+1} = 0$ となり，原点を写像しても原点にとどまる．このように相平面内で写像によって変わらない点のことを**固定点**と呼ぶ．

注：図 4.2 のような相平面内の解軌道は，代数幾何学における■という概念と関連が深い．このことを指摘したのは早稲田大学理工学部の岩尾昌央氏である [30]．

問 4.19 線形写像により線分が線分に写像されること，および線分を $t:1-t$ に内分する点はやはり $t:1-t$ に内分する点に写像されることを示せ．

問 4.20 相平面内の以下の図形を (4.11) で繰り返し写像することによって得られる図形全体の形を示せ．

(i) 横軸の正の部分　　(ii) 2 点 (0,1), (1,0) を結ぶ線分

4.5 保存量と多角形

前節の図 4.2 (b) の五角形は，(4.11) の保存則を表している．なぜなら，この五角形上の点は (4.11) の写像によって同じ五角形上にいつづけるからである．では，どのようにすれば五角形を式で表現できるだろうか．

それにはまず五角形の内部領域を不等式で表現することから始めるとよい．図 4.2 (b) の内部領域は連立不等式

$$X \le C, \quad Y \le C, \quad Y \ge X - C, \quad Y \le X + C, \quad Y \ge -X - C$$

で表現することができる．ただし，簡単のため横軸の X_{n-1} を X，縦軸の X_n を Y と表している．右辺に C を残す形で各不等式を整理すると

$$X \le C, \quad Y \le C, \quad X - Y \le C, \quad Y - X \le C, \quad -X - Y \le C$$

となる．これと等価な条件を max によって表すと

$$\max(X,\ Y,\ X-Y,\ Y-X,\ -X-Y) \le C$$

となる．そして領域の境界は上の式の＝の場合になるので，五角形は

$$\max(X,\ Y,\ X-Y,\ Y-X,\ -X-Y)=C$$

で表される．すなわち (4.11) の保存則は

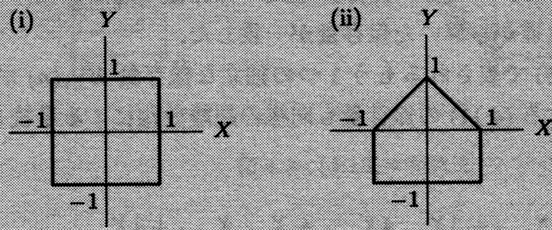
$$\max(X_{n-1},\ X_n,\ X_{n-1}-X_n,\ X_n-X_{n-1},\ -X_{n-1}-X_n)=C \tag{4.12}$$

となる．なお，右辺の定数 C は初期値 X_0, X_1 を決めれば同じ式によって

$$C=\max(X_0,\ X_1,\ X_0-X_1,\ X_1-X_0,\ -X_0-X_1)$$

と定まる．

問 4.21 次の多角形を max の式で表せ．



問 4.22 次の式はどのような図形を表しているか．
(i) $\max(X-Y, 2X-Y)=0$　(ii) $\max(X-Y, Y-X, X+Y, -X-Y)=1$
(iii) $\max(X^2-Y, Y+X^2-1)=0$

実は，(4.12) を元の差分方程式の保存則から求めることができる．まず，(4.11) は，(4.10) の x_n を $x_n=\exp(X_n/\varepsilon)$ と変数変換し，$\varepsilon\to+0$ の極限をとることで導かれた．また，(4.10) の保存則の 1 つに (2.18) がある．

$$H_1(n)=(x_{n-1}^2x_n+x_{n-1}x_n^2+x_{n-1}^2+x_n^2+2x_{n-1}+2x_n+1)/(x_{n-1}x_n)$$

この保存則にも同じ変換をほどこし，$\widetilde{H}_1(n) = \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(H_1(n))$ とすると，

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_1(n) &= \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log\bigl\{(e^{(2X_{n-1}+X_n)/\varepsilon} + e^{(X_{n-1}+2X_n)/\varepsilon} + e^{2X_{n-1}/\varepsilon} + e^{2X_n/\varepsilon} \\
&\qquad + 2e^{X_{n-1}/\varepsilon} + 2e^{X_n/\varepsilon} + 1)/e^{(X_{n-1}+X_n)/\varepsilon}\bigr\} \\
&= \max(2X_{n-1} + X_n,\ X_{n-1} + 2X_n,\ 2X_{n-1},\ 2X_n,\ X_{n-1},\ X_n,\ 0) \\
&\qquad - X_{n-1} - X_n \\
&= \max(X_{n-1},\ X_n,\ X_{n-1} - X_n,\ X_n - X_{n-1},\ -X_{n-1},\ -X_n, \\
&\qquad - X_{n-1} - X_n) \\
&= \max(X_{n-1},\ X_n,\ X_{n-1} - X_n,\ X_n - X_{n-1},\ -X_{n-1} - X_n)
\end{aligned}$$

となる．ただし，最後の変形で，$-X_{n-1} \leq \max(X_n - X_{n-1}, -X_{n-1} - X_n)$，$-X_n \leq \max(X_{n-1} - X_n, -X_{n-1} - X_n)$ を用いている．この $\widetilde{H}_1(n)$ と (4.12) の左辺は同じ形である．つまり，差分方程式の保存量の超離散化により得られた保存量と，解軌道から導いた保存量が一致した．

(4.10) には，(2.19) で表されるもう 1 つの独立な保存量 $H_{2,1}(n)$ があった．この保存量に対応する (4.11) の保存量も同様の超離散化による手続きから次式のように得られる．

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_{2,1}(n) &= \max(3X_{n-1} + 3X_n,\ 4X_{n-1} + X_n,\ X_{n-1} + 4X_n, \\
&\qquad 3X_{n-1} + X_n,\ X_{n-1} + 3X_n, \\
&\qquad 3X_{n-1},\ 2X_{n-1} + X_n,\ X_{n-1} + 2X_n,\ 3X_n, \\
&\qquad 2X_{n-1},\ X_{n-1} + X_n,\ 2X_n,\ X_{n-1},\ X_n) - 2X_{n-1} - 2X_n \\
&= \max(3X_{n-1} + 3X_n,\ 4X_{n-1} + X_n,\ X_{n-1} + 4X_n, \\
&\qquad 3X_{n-1},\ 3X_n,\ X_{n-1},\ X_n) - 2X_{n-1} - 2X_n
\end{aligned}$$

問 4.23 次の式を $x = e^{X/\varepsilon}$, $y = e^{Y/\varepsilon}$, $c = e^{C/\varepsilon}$, $\varepsilon \to +0$ によって超離散化する．得られた式は XY 平面でどのような図形を表すか．ただし c (C) は定数である．

(i) $x^2 + y^2 = c^2$　(ii) $\dfrac{1}{xy}(x^2 + 2y^2 + xy^2 + 3y) = c$

4.6 その他のマックス–プラス型の再帰方程式

次の再帰方程式は周期が 9 である．

$$X_{n+1} = \max(X_n, -X_n) - X_{n-1} \tag{4.13}$$

いくつかの初期値から得られた 9 周期解を相平面にプロットしたものを図 4.3 (a) に示す．$C > 0$ に対して $P_1(C, 0)$ を初期値とすると，

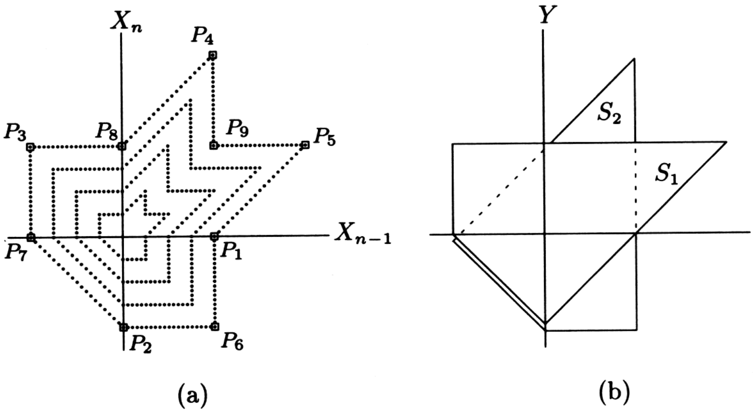


図 4.3 (4.13) の解軌道

$$P_1(C,0) \to P_2(0,-C) \to P_3(-C,C) \to P_4(C,2C) \to P_5(2C,C)$$
$$\to P_6(C,-C) \to P_7(-C,0) \to P_8(0,C) \to P_9(C,C) \to P_1$$

と 9 周期で元に戻ることが (4.13) より確認できる．また，線分 P_1P_6 は

$$P_1P_6 \to P_2P_7 \to P_3P_8 \to P_4P_9 \to P_5P_1$$
$$\to P_6P_2 \to P_7P_3 \to P_8P_4 \to P_9P_5 \to P_1P_6$$

の順に写像され，図に示されるような閉じた多角形軌道を構成する．この軌道を原点を中心に任意倍に拡大縮小したものも解の軌道となる．

問 4.24 P_1 を写像すると (4.13) によって $P_2 \sim P_9$ が得られることを確認せよ．

この多角形を max で表現できれば保存量がわかる．ところが，前節で述べた多角形を max で表す方法は凸多角形にのみ使え，凹凸のある多角形には使えない．そこで以下の工夫を行う．まず，図 4.3 (a) に現れる多角形を (b) のように凸多角形の重ね合わせで表現する．片方を S_1，もう片方を S_2 と名付けると，それぞれは前節の方法によって max で表現可能であり，

$$S_1 \;:\; F(X,Y) \equiv \max(-X, Y, X-Y, -X-Y) = C$$

$$S_2 \;:\; G(X,Y) \equiv \max(X, -Y, -X+Y, -X-Y) = C$$

となる．また，S_1 の周囲を含まない内部領域では $F(X,Y) < C$，S_2 では $G(X,Y) < C$ が成り立つ．したがって S_1, S_2 を重ねてその輪郭だけを取り出したければ

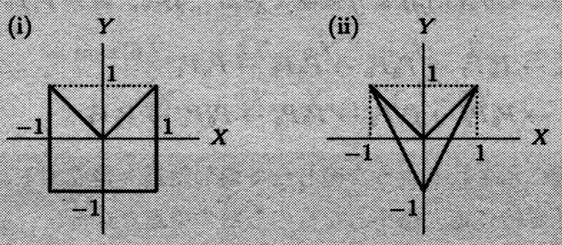
$$H(X,Y) \equiv \min(F(X,Y), G(X,Y)) = C$$

とすればよい．つまり $H(X_{n-1}, X_n)$ が (4.13) の保存量となる．この量を max だけで表したければ，$\min(X,Y) = X + Y - \max(X,Y)$ より

$$\begin{aligned} H(X,Y) = \max(-X, Y, X-Y, -X-Y) + \max(X, -Y, -X+Y, -X-Y) \\ - \max(X, -X, Y, -Y, X-Y, -X+Y, -X-Y) \end{aligned}$$

とすればよい．凹部を含むような多角形は，以上のように凸多角形の重ね合わせで表現することにより，max で表現することが可能となる．なお，(4.13) は再帰方程式なので，この保存量と独立な別の保存量も存在するが省略する．

問 4.25 次の多角形を max の式で表せ．



第2章でリストアップされている再帰方程式は，負の項が本質的な役割を果たすことが多く，ほとんどが超離散化できない．たとえば 79 ページの周期

8 の 3 階差分方程式のリストのうち，超離散化できるのは一番下の方程式のみである．この方程式については $x_n = e^{X_n/\varepsilon}$ の変換と $\varepsilon \to +0$ の極限により

$$X_{n+3} = \max(0, X_{n+1}, X_{n+2}) - X_n \tag{4.14}$$

が得られる．

問 4.26 (4.14) で初期値 (X_0, X_1, X_2) を

$$\text{(i)}\quad (1,0,0) \qquad \text{(ii)}\quad (1,-1,-2) \qquad \text{(iii)}(\sqrt{2},1,-\sqrt{2})$$

とすると，それぞれどのような解が得られるか．

問 4.27 (4.14) で $(X_0, X_1, X_2) = (a, b, c)$ とする．
(i) $a > b > c > 0$, (ii) $a > c > b > 0$ の 2 通りの場合について周期解を a, b, c で表せ．

4.7 可積分力学系の超離散化

2.5 節で，差分可積分力学系の例として QRT 系 (2.11) が紹介された．ここでは QRT 系を超離散化することを考える [31–33]．まず，もう一度方程式を以下に記す．

$$x_{n+1} = \frac{f_1(x_n) - x_{n-1} f_2(x_n)}{f_2(x_n) - x_{n-1} f_3(x_n)} \tag{4.15}$$

ここで f_1, f_2, f_3 は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= (a_{21}x^2 + a_{22}x + a_{23})(b_{31}x^2 + b_{32}x + b_{33}) \\
&\qquad - (a_{31}x^2 + a_{32}x + a_{33})(b_{21}x^2 + b_{22}x + b_{23}) \\
f_2(x) &= (a_{31}x^2 + a_{32}x + a_{33})(b_{11}x^2 + b_{12}x + b_{13}) \\
&\qquad - (a_{11}x^2 + a_{12}x + a_{13})(b_{31}x^2 + b_{32}x + b_{33}) \\
f_3(x) &= (a_{11}x^2 + a_{12}x + a_{13})(b_{21}x^2 + b_{22}x + b_{23}) \\
&\qquad - (a_{21}x^2 + a_{22}x + a_{23})(b_{11}x^2 + b_{12}x + b_{13})
\end{aligned}$$

ただし，係数は $a_{jk}=a_{kj}, b_{jk}=b_{kj}$ を満たす．このとき，

$$
\begin{aligned}
H(x,y) &= N(x,y)/D(x,y) \qquad (4.16)\\
N(x,y) &= a_{11}x^2y^2+a_{12}x^2y+a_{13}x^2+a_{21}xy^2+a_{22}xy+a_{23}x\\
&\quad +a_{31}y^2+a_{32}y+a_{33}\\
D(x,y) &= b_{11}x^2y^2+b_{12}x^2y+b_{13}x^2+b_{21}xy^2+b_{22}xy+b_{23}x\\
&\quad +b_{31}y^2+b_{32}y+b_{33}
\end{aligned}
$$

とすると，$H(x_{n-1},x_n)$ は n によらない定数となり保存量となった．

(4.15) を超離散化するには，右辺に負の項が現れないように工夫する必要がある．そこで係数に制限条件を設けて，たとえば

$$a_{11}=a_{33}b_{11},\quad a_{12}=a_{33}b_{12},\quad a_{13}=a_{33}b_{13},\quad a_{23}=a_{33}b_{23},\quad b_{33}=1 \qquad (4.17)$$

とすると，

$$x_{n+1}=\frac{b_{13}x_n^2+b_{23}x_n+1}{x_{n-1}(b_{11}x_n^2+b_{12}x_n+b_{13})} \qquad (4.18)$$

となる．この式中の係数 b_{ij} をすべて非負にすると超離散化できるが，係数の自由度がまだ高すぎるので，さらに次式のように制限を設ける．

$$b_{11}=0,\quad b_{12}=\frac{1}{c},\quad b_{13}=1,\quad b_{23}=c+\frac{1}{c} \qquad (4.19)$$

すると次式が得られる．

$$x_{n+1}=\frac{1+c\,x_n}{x_{n-1}} \qquad (4.20)$$

この式を超離散化してみよう．x_n から X_n への変数変換 $x_n=e^{X_n/\varepsilon}$ を行い，同時に定数 c も $c=e^{C/\varepsilon}$ を通じて C に変換する．すると，$\varepsilon\to+0$ の極限で (4.20) から次式が得られる．

$$X_{n+1}=\max(0,X_n+C)-X_{n-1} \qquad (4.21)$$

$C=0$ の場合にこの式は再帰方程式 (4.11) に等しい．また $C\neq 0$ の場合，$X_n=|C|X'_n$ とすると X'_n についての方程式は (4.21) の $C=1,\ -1$ の場合のどちらかに等しくなる．つまり，(4.21) は $C=0,\ \pm1$ の場合を調べれば十分である．

問 4.28 (i) (4.18) に対して以下の条件を加えると，それぞれどのような式が得られるか．

(a) $b_{11}=b_{13}=0,\quad b_{12}=1,\quad b_{23}=c$

(b) $b_{11}=1,\quad b_{12}=b_{13}=0,\quad b_{23}=c$

(ii) (i) で得られた方程式に $x_n=e^{X_n/\varepsilon}$, $c=e^{1/\varepsilon}$, $\varepsilon\to+0$ の超離散化を行って X_n に関する方程式を求めよ．

では，$C=1$ の場合に (4.21) の解を調べてみよう．方程式は

$$X_{n+1}=\max(0,X_n+1)-X_{n-1} \tag{4.22}$$

である．いろいろな初期値から数値計算を行うと，以下のことがわかる．まず，相平面上で図 4.4 のように点 $(-1,-1),(1,-1),(3,1),(3,3),(1,3),(-1,1)$ を頂点とする六角形 H および点 $P(1,1)$ を考える．

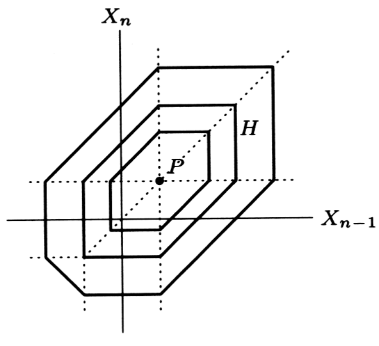


図 4.4　(4.22) の解軌道

式に代入すればすぐ分かるが，P を初期値とする解は常に P にとどまる．次に，六角形 H の内部領域（H 自身も含む）の P 以外の任意の点を初期値にとろう．すると，そのような点からの解は，以下の理由により必ず H 内にとどまったまま周期 6 で自分自身に戻ってくる．まず，H の内部領域は $X_{n-1}\geq-1$, $X_n\geq-1$ を満たしている．そこで任意の n に対して $X_n\geq-1$ と仮定する．すると (4.22) より

$$X_{n+1}=X_n-X_{n-1}+1 \tag{4.23}$$

が得られる．この方程式の解は，$X_2 = X_1 - X_0 + 1$, $X_3 = -X_0 + 2$, $X_4 = -X_1 + 2$, $X_5 = X_0 - X_1 + 1$, $X_6 = X_0$, $X_7 = X_1$ となり，確かに周期 6 である．ただし，(4.23) が任意の n で成立するためには $X_n \geq -1$ を常に満たさなければならないので，

$$X_0 \geq -1, \quad X_1 \geq -1, \quad X_1 - X_0 + 1 \geq -1,$$
$$-X_0 + 2 \geq -1, \quad -X_1 + 2 \geq -1, \quad X_0 - X_1 + 1 \geq -1$$

の条件を同時に満たす必要がある．この条件で得られる領域が H を外周とする六角形領域である．

問 4.29　(4.22) の固定点が P 以外にないことを示せ．

問 4.30　(4.21) で $C = -1$ の場合に，相平面内で $-1 \leq X_{n-1} \leq 1$, $-1 \leq X_n \leq 1$ によって表される領域では，任意の初期値からの解が領域をはみ出さず，固定点を除き常に同じ周期になる．このことを示せ．

六角形 H の外側の領域については，解の挙動がもっと複雑になる．たとえば $(X_0, X_1) = (4, 4), (5, 5)$ を初期値とした場合，それぞれ以下の周期解が得られる．

$$4, 4, 1, -2, -1, 2, 4, 3, 0, -2, 0, 3, 4, 2, -1, -2, 1, 4, 4 \qquad (\text{周期 } 17)$$
$$5, 5, 1, -3, -1, 3, 5, 3, -1, -3, 1, 5, 5 \qquad (\text{周期 } 11)$$

さらに $(9/2, 9/2)$ を初期値とすると，以下の各数を 2 で割った周期解が得られ，周期が 39 となる．

$$9, 9, 2, -5, -2, 5, 9, 6, -1, -5, 1, 8, 9, 3, -4, -3, 4, 9, 7, 0, -5,$$
$$0, 7, 9, 4, -3, -4, 3, 9, 8, 1, -5, -1, 6, 9, 5, -2, -5, 2, 9, 9$$

(4,4) を初期値とした場合の相平面上の解を図 4.5 (a) に示す．P_1 から順に $P_2, P_3, \ldots, P_{17}$ まで移り再び P_1 に戻る．すると隣り合う点を結んで多角形が得られる．(4.22) において X_n が -1 より大きいか小さいかが線形写像の種類を変える条件であり，相平面では P_4 と P_{14} を結ぶ直線の上か下かによって変

わる．隣り合う 2 点を結んで得られる線分はどれもどちらかの領域に全体が含まれているので，すべて線形写像によって線分から線分に移る．したがって線分 P_1P_7 は

$$\begin{aligned}P_1P_7 &\to P_2P_8 \to P_3P_9 \to \cdots \to P_{11}P_{17}\\ &\to P_{12}P_1 \to P_{13}P_2 \to \cdots \to P_{17}P_6 \to P_1P_7\end{aligned}$$

という順で次々と線分に写像され，再び元に戻ってくることがわかる．よってこの多角形上の任意の点は周期 17 で元の点に戻る．

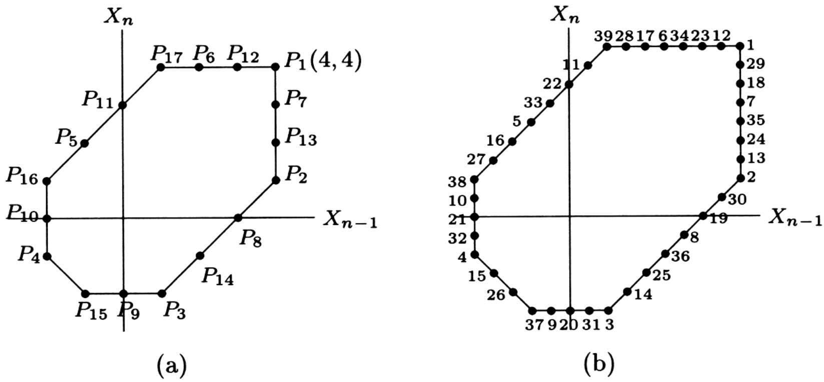


図 4.5　図 4.4 の H より外側での解軌道．初期値は (a) (4,4), (b) (9/2,9/2)

次に，図 4.5 (b) に (9/2,9/2) を初期値とした場合の解を示す．隣り合う点同士を結んで得られる多角形は (a) のものと同じような形であり，$P_1P_{29} \to P_2P_{30} \to \cdots$ という順で各線分同士が線形写像で移っていくのも (a) と同様である．しかし，線分が (a) に比べて短く，39 回写像の後にやっと元に戻ってくる．

問 4.31　相平面内で点 (6,6) および (7,7) を初期値にとったときの (4.22) の解の周期を求めよ．

問 4.32　$P > 3$ のとき相平面内で 2 点 (P,P), $(P,1)$ を結ぶ線分を (4.22) によって 2 回写像すると，どのような図形が得られるか．

相平面で解が表す多角形は，保存量を表している．そこで，(4.22) の保存量を考えよう．まず，(4.16) の保存量 $H(x,y)$ に，(4.17) および (4.19) の条件を考慮すると (4.20) の保存量が得られ，次式のようになる．

$$H(x,y) = a_{33} + \frac{(a_{22} - a_{33}b_{22})cxy}{c + (1+c^2)(x+y) + c(x^2+y^2) + b_{22}cxy + xy(x+y)}$$

なお，x は x_{n-1}, y は x_n を表している．この H から以下のように H' を定義すると，a_{ij}, b_{ij}, c が n によらない定数なので H' も保存量になる．

$$H'(x,y) = \frac{(a_{22} - a_{33}b_{22})c}{H(x,y) - a_{33}} - b_{22}c = \frac{1}{xy}(c + (1+c^2)(x+y) + c(x^2+y^2) + xy(x+y))$$

この保存量に，超離散化を行ったときの変数変換 $x_n = e^{X_n/\varepsilon}$, $c = e^{C/\varepsilon}$ を施すと，

$$\begin{aligned} H'(e^{X/\varepsilon}, e^{Y/\varepsilon}) = e^{-(X+Y)/\varepsilon}\{&e^{C/\varepsilon} + (1 + e^{2C/\varepsilon})(e^{X/\varepsilon} + e^{Y/\varepsilon}) \\ &+ e^{C/\varepsilon}(e^{2X/\varepsilon} + e^{2Y/\varepsilon}) + e^{(X+Y)/\varepsilon}(e^{X/\varepsilon} + e^{Y/\varepsilon})\} \end{aligned}$$

が得られる．そこで $G(X,Y) = \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log H'$ とすると

$$\begin{aligned} G(X,Y) = -X - Y + \max(C,\ &\max(0,2C) + \max(X,Y), \\ &C + \max(2X,2Y),\ X + Y + \max(X,Y)) \end{aligned} \tag{4.24}$$

が得られ，$G(X_{n-1}, X_n)$ が (4.21) の保存量となる．今はさらに $C = 1$ の場合，すなわち (4.22) を考えているので，

$$G(X,Y) = \max(1-X-Y,\ 2-X,\ 2-Y,\ 1+X-Y,\ 1-X+Y,\ X,\ Y) \tag{4.25}$$

となる．初期値 X_0, X_1 から $G(X_0, X_1) = A$ としよう．すると，このときの解 X_n の相平面上での点 (X_{n-1}, X_n) は常に $G(X,Y) = A$ が表す多角形上にのる．多角形を max の式で表す 4.5 節の方法を逆にたどると，$G(X,Y) = A$ が表す多角形とは「max の中身の各項 $\leq A$」の条件を同時に満足する領域の外周である．この条件を整理すると

(i) $-X - A + 1 \leq Y$,　(ii) $2 - A \leq X \leq A$,　(iii) $2 - A \leq Y \leq A$,

(iv) $X - A + 1 \leq Y \leq X + A - 1$

となる．条件 (ii)~(iv) より $A \geq 1$ でないと領域が存在しないことがわかる．(ii)~(iv) から定まる領域は，大まかに描くと図 4.6 のような六角形の内部となる．そして条件 (i) から，$A > 3$ では l_1 のように六角形と交わる直線より上，$A < 3$ では l_2 のように交わらない直線より上であることが指定される．すると $A > 3$ のときは六角形領域の左下の一部が欠ける．このことから，場合によって解の軌道が六角形になったり七角形になったりするのである．

なお，以上のような可積分力学系の超離散化に関する研究は現在も発展中である．

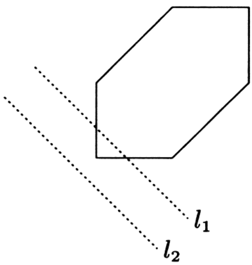


図 4.6　条件 (ii)~(iv) で定まる六角形領域と条件 (i) との関係

問 4.33 (4.25) の $G(X,Y)$ に対し，$G(X,Y)=3$ によって表される図形が図 4.4 の六角形 H であることを示せ．

問 4.34 (4.24) で $C=-1$ のときに $G(X,Y)=A$ が表す図形を A によって分類せよ．

4.8 セルオートマトン

セルオートマトンあるいは**セルラーオートマトン** (Cellular Automaton, CA) とは独立変数（空間や時間など）と従属変数（状態変数）がすべて離散的で，さらに従属変数の値域が有限集合になっているような時間発展系のことをいう [34,35]．たとえば，空間格子（サイトとも呼ぶ）j と整数時刻 n を独立変数，U を従属変数としよう．また j, n における U の値を U_j^n と書くことにす

る．このとき

$$U_j^{n+1} = U_{j+1}^n U_j^n (1 - U_{j-1}^n)$$

という時間発展方程式を考えると，初期の U の値がすべて 0 か 1 だけならば，右辺は常に 0 か 1 の値しかとらないのでこの時間発展系は CA を構成する．あるいは，2 次元空間格子 i, j と整数時刻 n に対して

$$U_{ij}^{n+1} = U_{i+1j}^n + U_{ij-1}^n + 2U_{ij}^n + (-1)^{U_{ij}^{n-1}} \mod 10$$

で定義される系は，従属変数が $0 \le U \le 9$ の範囲で閉じるのでやはり CA を構成する．

以上は一般的な CA の定義であるが，このうちで以下の形を満たすものを考えよう．

$$U_j^{n+1} = f(U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n) \tag{4.26}$$

ただし，状態変数 U の値は 0 か 1 のどちらかであり，関数 $f(x, y, z)$ も 3 つの引数の値に応じて 0 か 1 の値しかとらない．この形にあてはまる CA 全体を **Elementary CA** (ECA) という．これだけの定義では，$f(x, y, z)$ のバリエーションに応じて無限種類の ECA があるように思うかもしれない．ところが実は異なる ECA は有限個しかない．なぜなら，3 つの引数 x, y, z はどれも 0 か 1 の値しかとらないのでその値の組合せは $2^3 = 8$ 通りであり，それぞれに応じてたとえば以下の表のように f の値を 0 になるか 1 になるかを定めてしまえば，それで 1 つの ECA が決まってしまうからである．

$x\ y\ z$	111	110	101	100	011	010	001	000
$f(x, y, z)$	0	0	1	0	1	1	0	0

すなわち ECA は全部で $2^8 = 256$ 種類しかない．表の下段の 0, 1 の並びによって ECA が 1 つ決まるので，その並びを 2 進数とみなして各 ECA を区別する番号（**ルール番号**）を付けることができる．上の表のルール番号は $(00101100)_2 = 44$ である．結局すべての ECA には $(00000000)_2 = 0$ から $(11111111)_2 = 255$ までの合計 256 個の一意的な番号が付けられる．

では実際にルール表にもとづいて数値計算を行ってみる．上のルール番号 44 の ECA について，時刻 $n = 0$ で U_j^0 を

$$j \rightarrow$$

...00010111011000...

とする．すると，$n \geq 1$ での状態は上のルール表にもとづいて，

$n=0$	...00010111011000...
1	...00011100110000...
2	...00010000100000...
3	...00010000100000...
4	...00010000100000...

となることがわかる．0 と 1 の並びで表示すると目がちらつくので，0 を□，1 を■で表示すると，上の状態は図 4.7 のように表示できる．図中に空間格子 j や時刻 n の具体的な値を表示していないのは，(4.26) の形の方程式の解は j や n を適当にずらしてもやはり解になっているからである．

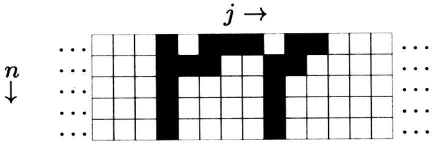


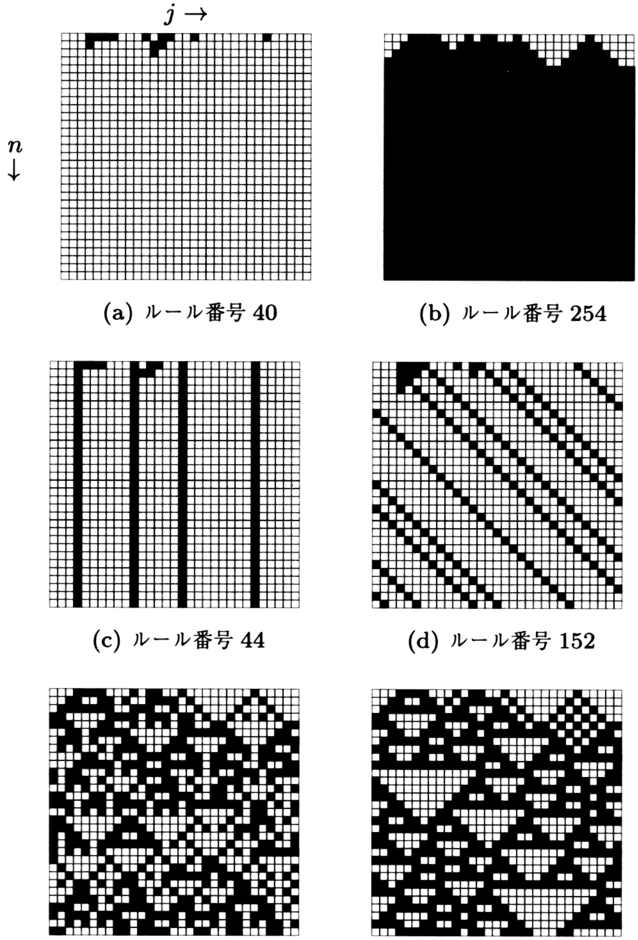
図 4.7 ルール番号 44 のパターン

Wolfram は，広い範囲の CA に対していろいろな初期値から生じるパターンを調べ，それら CA が以下の 4 つのクラスに分類できることを指摘した [34,35].

- すべて 0 か 1 の一様な状態にたどり着く（クラス 1）
- 1 の領域と 0 の領域が分離した定常パターンにたどり着く（クラス 2）
- 三角波がカオス的に生成消滅する（クラス 3）
- 1 あるいは 0 の領域が時間とともに枝のように伸びる（クラス 4）

ただし，ECA についてはクラス 4 に属するものがない．ECA についてクラス 1 ～ 3 の典型的な例を以下に示す．なお，初期値はすべて同じものを用いている．また，空間格子に関しては周期境界条件，すなわち右端の格子点の右隣は左端の格子点，左端の格子点の左隣は右端の格子点という周期性を課している．図 4.8 の (a), (b) がクラス 1，(c), (d) がクラス 2，(e), (f) がクラス 3 に属している．

なお上記のクラス分けは任意の初期値に対して常に正しい分類を与えるわけではなく，ECA の解のふるまいに対する大まかな評価を与えているだけである．ECA の各ルールに対して個別的に解析を行うことも興味深い研究となる．次節では超離散化を応用して，解の構造に超離散化からの光を当てることにしよう．



(a) ルール番号 40　(b) ルール番号 254

(c) ルール番号 44　(d) ルール番号 152

(e) ルール番号 90　(f) ルール番号 122

図 4.8　ECA の時間発展

問 4.35 ルール番号 6, 94, 174 の ECA について，$n = 0$ での初期値を $\cdots 001110101100 \cdots$ としたときの解の時間発展を $n = 3$ まで計算せよ．

問 4.36 ルール番号 2, 144 の ECA について，空間格子を $-\infty < j < \infty$ の範囲にとる．このとき 1 が有限個連続している初期状態 $\cdots 011 \cdots 110 \cdots$ からどのようなパターンが得られるか．

4.9 セルオートマトンと逆超離散化

ECA のすべてのルールは，NOT(∼), OR(∨), AND(∧) の 3 種類のブール演算によって表現できる [36]．それら演算の定義を以下の表に示す．

A	$\sim A$
0	1
1	0

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

たとえばルール番号 90 の ECA の時間発展則は

$U_{j-1}^n\ U_j^n\ U_{j+1}^n$	111	110	101	100	011	010	001	000
U_j^{n+1}	0	1	0	1	1	0	1	0

であるが，これをブール演算で表現すると，たとえば

$$U_j^{n+1} = (U_{j-1}^n \vee U_{j+1}^n) \wedge (\sim(U_{j-1}^n \wedge U_{j+1}^n)) \tag{4.27}$$

となる．この式から明らかなように，ルール番号 90 では U_j^{n+1} は U_j^n に依存せず，U_{j-1}^n と U_{j+1}^n だけで決定される．また，ブール演算を用いずに表現することも可能で，たとえば

$$U_j^{n+1} = |U_{j-1}^n - U_{j+1}^n| \tag{4.28}$$

でもルール表を再現することができる．

(4.27), (4.28) を差分方程式の超離散化によって得ることができないだろうか．どちらの式についても，用いている演算をマックス–プラス代数の基礎演

算である max (min), ± で表すことができればよい．ブール演算については，A, B を 0, 1 に限定するならば以下の書き換えが成り立つ．

$$\sim A = 1 - A, \qquad A \vee B = \max(A, B),$$
$$A \wedge B = \min(A, B) = -\max(-A, -B)$$

すると (4.27) を次式のように表すことができる．

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= \min(\max(U_{j-1}^n, U_{j+1}^n), 1 - \min(U_{j-1}^n, U_{j+1}^n)) \\ &= \max(U_{j-1}^n, U_{j+1}^n) - \max(0, U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 1) \end{aligned} \tag{4.29}$$

問 4.37 (4.29) の上の行から下の行への式変形を確認せよ．

また，(4.28) については $|x| = \max(x, -x)$ より

$$U_j^{n+1} = \max(U_{j-1}^n - U_{j+1}^n, U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) \tag{4.30}$$

と表せる．

問 4.38 U の値を 0, 1 に限定しなければ，(4.29) と (4.30) が異なる方程式であることを示せ．

超離散化によって (4.29), (4.30) を導くことのできる差分方程式を見つけよう．このような差分方程式を見つける操作を**逆超離散化** (back-ultradiscretization) と呼ぶことにする．

注：組合せ論でもトロピカル化 (tropicalization) という逆超離散化に相当する概念が使われ始めている [37].

(4.29) については，たとえば

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j-1}^n + u_{j+1}^n}{1 + \delta u_{j-1}^n u_{j+1}^n} \tag{4.31}$$

がある [38]．この差分方程式は，変数変換 $u_j^n = e^{U_j^n/\varepsilon}$ とパラメータ変換 $\delta = e^{-1/\varepsilon}$ によって

$$U_j^{n+1} = \varepsilon(\log(e^{U_{j-1}^n/\varepsilon} + e^{U_{j+1}^n/\varepsilon}) - \log(1 + e^{(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 1)/\varepsilon})) \qquad (4.32)$$

となり，$\varepsilon \to +0$ の極限で (4.29) に一致する．また，(4.30) の逆超離散化については，たとえば

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j-1}^n}{u_{j+1}^n} + \frac{u_{j+1}^n}{u_{j-1}^n} \qquad (4.33)$$

が考えられる．この差分方程式に対して，変数変換 $u_j^n = e^{U_j^n/\varepsilon}$ を行えば

$$U_j^{n+1} = \varepsilon \log(e^{(U_{j-1}^n - U_{j+1}^n)/\varepsilon} + e^{(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)/\varepsilon}) \qquad (4.34)$$

となり，$\varepsilon \to +0$ の極限で (4.30) が得られる．

問 4.39 次の ECA を逆超離散化せよ（答は 1 通りではないので例を示せばよい）．
(i) $U_j^{n+1} = U_{j-1}^n \vee U_j^n$ (ii) $U_j^{n+1} = U_{j-1}^n \wedge (U_j^n \vee (\sim U_{j+1}^n))$
(iii) $U_j^{n+1} = |U_{j-1}^n U_j^n - U_{j+1}^n|$

では，差分方程式の解は超離散化の極限で ECA の解に一致するのだろうか．まず，ルール番号 90 の ECA に対する図 4.9 (a) の解を考える．初期時刻に 2 つの格子点のみ 1 の値をおいている．次に，(4.32) に対して同じ初期値を用い，$\varepsilon = 0.2, 0.01$ の 2 つの場合について時間発展を計算したものを図 4.9 (b), (c) に示す．また，(4.34) に対して同様のことを行った結果を図 4.9 (d), (e) に示す．(b)～(e) のすべての図で各 (j, n) での U の値を棒グラフの高さで示している．棒グラフの高さは U の値に比例しており，高さが 0 で $U = 0$ に対応する．なお，図 4.9 のすべての図において空間格子に関して周期境界条件を課している．ε の値が大きい (b), (d) でも，初期時刻に近い範囲では背の高い棒の分布と (a) で見られる 1 のパターンとが一致している．ところが，時間とともに全体の値が正の一定値に近づき，最後の時刻のあたりではもはや (a) で見られたパターンがなくなっている．一方，ε の値を小さくした (c), (e) の方では，最後の時刻まで (a) と同じパターンが観察できる．このように，逆超離散化で得られた差分方程式の解は，ε の値が小さくなればなるほど超離散方程式の解に近づいていく．

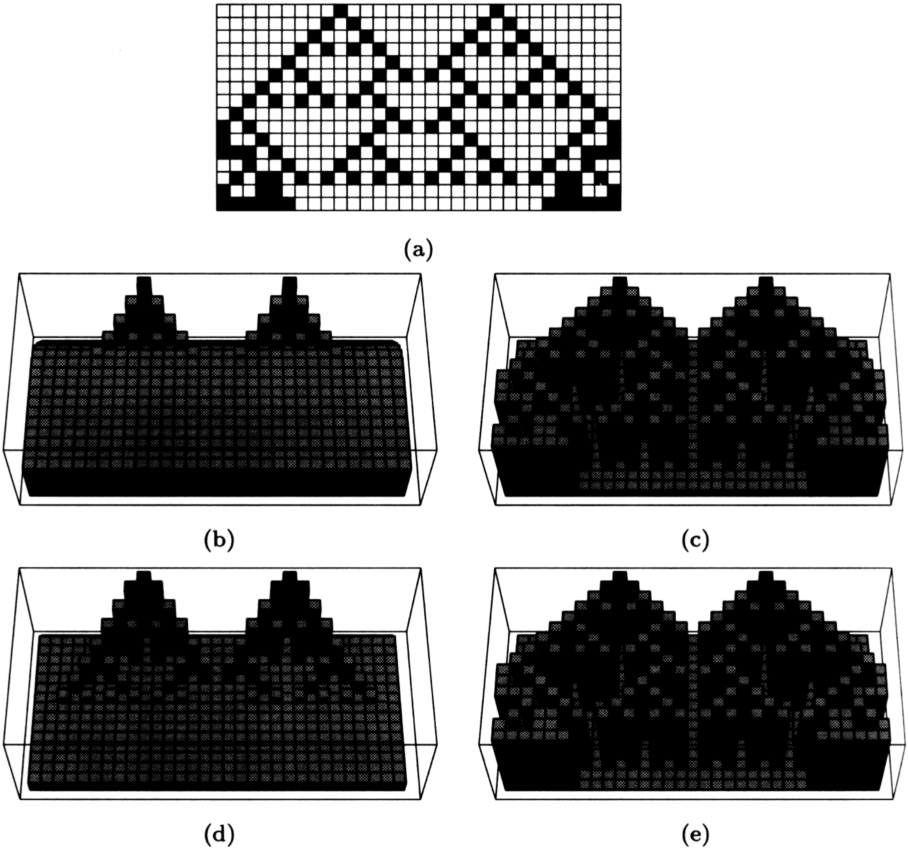


図 **4.9**　ルール番号 90 の ECA の逆超離散化. (a) ECA, (b) $\varepsilon = 0.2$ の (4.32), (c) $\varepsilon = 0.01$ の (4.32), (d) $\varepsilon = 0.2$ の (4.34), (e) $\varepsilon = 0.01$ の (4.34)

4.10　逆超離散化のあいまいさ

ルール番号 90 の ECA では，ルールを表現する方程式について，(4.29) と (4.30) の 2 通りを示した．U の値を 0, 1 に限定しなければこの 2 つの式は異なるものである．このように 1 つの ECA を表現するマックス–プラス型の方程式は一般に複数通り存在する．たとえば

$$U_j^{n+1} = U_{j-1}^n \vee U_{j+1}^n \tag{4.35}$$

を考えよう．U を 0, 1 に限定すれば，上式と次式は等価である．

$$U_j^{n+1} = (U_{j-1}^n \vee U_{j+1}^n) \wedge (U_{j-1}^n \vee \sim U_{j-1}^n) \tag{4.36}$$

そして機械的に $X \vee Y$ を $\max(X,Y)$ に，$X \wedge Y$ を $\min(X,Y)$ に，$\sim X$ を $1-X$ に置き換えれば，(4.35) からは

$$U_j^{n+1} = \max(U_{j-1}^n,\, U_{j+1}^n) \tag{4.37}$$

が，(4.36) からは

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= \min(\max(U_{j-1}^n,\, U_{j+1}^n),\, \max(U_{j-1}^n,\, 1-U_{j-1}^n)) \\ &= \max(U_{j-1}^n,\, U_{j+1}^n) + \max(U_{j-1}^n,\, 1-U_{j-1}^n) \\ &\qquad - \max(U_{j-1}^n,\, 1-U_{j-1}^n,\, U_{j+1}^n) \end{aligned} \tag{4.38}$$

が得られる．(4.37) と (4.38) は U の値を 0, 1 に限定しなければ等価ではない．

さらに，max の表現自体にも自由度が存在する．たとえば (4.37) は

$$U_j^{n+1} = \max\left(U_{j-1}^n,\, U_{j+1}^n,\, U_{j-1}^n - 1,\, \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n)\right) \tag{4.39}$$

と書き換えても変わらない．なぜなら，max の後の 2 つの項は $\max(U_{j-1}^n,\, U_{j+1}^n)$ を越えることはないからである．

ECA (4.35) のマックス–プラス方程式による表現は，上の例でも (4.37), (4.38), (4.39) の 3 つ存在する．これらを逆超離散化してみよう．$u = e^{U/\varepsilon}$, $\lambda = e^{1/\varepsilon}$ という変換を用いて単純に考えると 3 つの方程式からそれぞれ次式が得られる．

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_{j-1}^n + u_{j+1}^n, \\ u_j^{n+1} &= (u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)(u_{j-1}^n + \lambda/u_{j-1}^n)/(u_{j-1}^n + \lambda/u_{j-1}^n + u_{j+1}^n), \\ u_j^{n+1} &= u_{j-1}^n + u_{j+1}^n + u_{j-1}^n/\lambda + \sqrt{u_{j-1}^n u_{j+1}^n} \end{aligned} \tag{4.40}$$

ところがこの逆超離散化にも一定の自由度が存在する．たとえば (4.40) は

$$u_j^{n+1} = 2u_{j-1}^n + 3u_{j+1}^n$$

と書き換えても，超離散化の際に 2 や 3 の係数が消えてしまうので構わない．

以上をまとめると，ECA から逆超離散化を利用して対応する差分方程式を得る際に，次のような「あいまいさ」が存在することがわかる．

- ECA を表現するマックス–プラス型の方程式がいくつもある
- マックス–プラス型の方程式に無視できる余計な項を付加できる
- 逆超離散化によって得られる差分方程式に係数の自由度が存在する

超離散化によって ECA を得るという意味では，この自由度で生成される差分方程式はどれも同じ価値を持っている．しかしながらそれでは差分方程式の側の情報があいまいになりすぎて，元の ECA が生み出すパターンの面白さを理解するのに何の役にも立たない．そこで次節では，超離散化を通じた ECA と差分方程式との対応に，より強い動機付けを行ってみよう．

問 4.40 U を 0, 1 に限定しなければ (4.37) と (4.38) が異なる式であることを示せ．

問 4.41 ルール番号 234 の ECA の逆超離散化を行って得られる差分方程式の候補を 2 つ示せ．

4.11　構造を保存する超離散化

4.9 節で述べたように，ルール番号 90 の ECA では U_j^{n+1} が U_{j-1}^n と U_{j+1}^n にのみ依存している．これにもとづいてルール表を書き改めると次のようになる．

$U_{j-1}^n\ U_{j+1}^n$	11	10	01	00
U_j^{n+1}	0	1	1	0

実は，排他的論理和 (Exclusive OR) と呼ばれる以下のブール演算 $\oplus$ がある [36]．

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

この演算を用いればルール番号 90 の ECA を次式のように書き表すことができる．

$$U_j^{n+1} = U_{j-1}^n \oplus U_{j+1}^n$$

さらに，$\oplus$ については通常の和の演算と同じように交換則，結合則が成り立つという重要な性質がある．

$$A \oplus B = B \oplus A, \qquad (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

問 4.42 $\oplus$ 演算について交換則，結合則が成り立つことを示せ．

ルール番号 90 の ECA の解が 2 つあるとし，それぞれを V_j^n, W_j^n としよう．すると，その 2 つの解の $\oplus$ をとった $U_j^n \equiv V_j^n \oplus W_j^n$ も，やはり解になることがすぐにわかる．なぜならば，交換則・結合則を用いれば次式が成り立つからである．

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= V_j^{n+1} \oplus W_j^{n+1} = (V_{j-1}^n \oplus V_{j+1}^n) \oplus (W_{j-1}^n \oplus W_{j+1}^n) \\ &= (V_{j-1}^n \oplus W_{j-1}^n) \oplus (V_{j+1}^n \oplus W_{j+1}^n) = U_{j-1}^n \oplus U_{j+1}^n \end{aligned}$$

すなわち，ルール番号 90 の ECA には $\oplus$ 演算に関して解の重ね合わせができるという重要な性質がある．たとえば初期時刻で 1 つの格子点だけ 1 とし，残りをすべて 0 とした初期状態からの解を考えよう．この解を図 4.10 に示す．この解を左と右にずらしたものを 1 つずつ用意し，各 (j, n) において $\oplus$ 演算による重ね合わせを行えば図 4.9 (a) の解が得られるのである．もっと簡単に言うと，ずらした 2 つの解の図を実際に重ね合わせて，□と□，■と■が重なるところは□に，□と■が重なるところは■にすればいいのである．これ

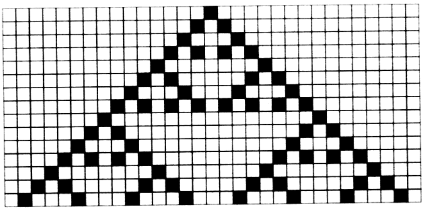


図 4.10　ルール番号 90 の ECA の基本解

により，図 4.10 の解の性質だけを十分に調べておけば，任意の初期値に対する解はその重ね合わせなので，たとえば $n \to \infty$ でのふるまいなどを予測することが容易になる．

では，この解の重ね合わせという性質は (4.29) や (4.30) で保存されているのであろうか．これを確認するには，(4.29) および (4.30) の右辺を U_{j-1}^n と U_{j+1}^n に対する 2 項演算とみなし，その演算で交換則・結合則が成り立っているかどうかをチェックすればよい．まず (4.29) について，右辺の 2 項演算を

$$A \oplus' B = \max(A, B) - \max(0, A + B - 1)$$

と表すと，交換則 $A \oplus' B = B \oplus' A$ が成り立っているのは明らかである．次に，結合則であるが，

$$\begin{aligned}
&(A \oplus' B) \oplus' C \\
&= \max(\max(A, B) - \max(0, A + B - 1), C) \\
&\qquad - \max(0, \max(A, B) - \max(0, A + B - 1) + C - 1) \\
&= \max(A, B, C, A + B + C - 1) - \max(0, A + B - 1, B + C - 1, C + A - 1) \\
&= A \oplus' (B \oplus' C)
\end{aligned}$$

となってやはり成立することがわかる．つまり，$\oplus'$ は値を 0, 1 に限定しなくても交換則・結合則が成り立つのである [38].

一方，(4.30) について同様に右辺の 2 項演算を

$$A \oplus'' B = \max(A - B, B - A) = |A - B|$$

と表そう．交換則は明らかに成り立つ．ところが結合則については，

$$\begin{aligned}
(A \oplus'' B) \oplus'' C &= \big||A - B| - C\big| \\
A \oplus'' (B \oplus'' C) &= \big|A - |B - C|\big|
\end{aligned}$$

となり，両者は等しくないので成り立たない．

問 4.43　$\oplus''$ について，結合則が成り立たない A, B, C の組を 1 つ挙げよ．

では，逆超離散化して得られた差分方程式 (4.31), (4.33) について，右辺を u_{j-1}^n, u_{j+1}^n に関する 2 項演算 田′, 田″ だと考えよう．すなわち

$$x \boxplus' y = \frac{x+y}{1+\delta xy}$$
$$x \boxplus'' y = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

とするのである．すると，両方とも交換則は成立する．結合則に関しては，

$$\begin{aligned}(x \boxplus' y) \boxplus' z = x \boxplus' (y \boxplus' z) &= \frac{x+y+z+\delta xyz}{1+\delta(xy+yz+zx)} \\ (x \boxplus'' y) \boxplus'' z \neq x \boxplus'' (y \boxplus'' z)&\end{aligned} \tag{4.41}$$

となり，田′ については成立するが，田″ については成立しない．したがって差分方程式 (4.31) は田′ について解の重ね合わせができるが，(4.33) にはそのような性質がない．

問 4.44 (4.41) を確認せよ．

以上のことから，ルール番号 90 の ECA については，もし解の重ね合わせという重要な性質を保存したければ，

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j-1}^n + u_{j+1}^n}{1+\delta u_{j-1}^n u_{j+1}^n}$$
$$\downarrow \quad u_j^n = e^{U_j^n/\varepsilon}, \quad \delta = e^{-1/\varepsilon}, \quad \varepsilon \to +0$$
$$U_j^{n+1} = \max(U_{j-1}^n, U_{j+1}^n) - \max(0, U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 1)$$
$$\downarrow \quad U_j^n \text{ を } 0, 1 \text{ に限定}$$

ルール番号 90 の ECA

$U_{j-1}^n\ U_j^n\ U_{j+1}^n$	111	110	101	100	011	010	001	000
U_j^{n+1}	0	1	0	1	1	0	1	0

という図式が考えられる．

逆超離散化を行うときには，ECA，マックス–プラス型方程式（超離散方程式）および差分方程式のどのような構造を保存させるかが重要になり，それ

が逆超離散化によって差分方程式を作るときの重要な手がかりになる．ただし何を保存するかという目的によっては，同じ ECA から異なる図式が生まれることもある．なお，Wolfram が行った ECA のクラス分けを逆超離散化に反映させようという意欲的な試みもあり，文献 [39, 40] に詳しい．

問 4.45 $U_j^{n+1} = U_{j-1}^n \oplus U_j^n \oplus U_{j+1}^n$ で定義される ECA のルール番号はいくつか．この CA の解も $\oplus$ を和とみなす解の重ね合わせができることを示せ．また，逆超離散化を行って，同じ性質をもつ差分方程式を導け．

章末問題

[4.1]　次を示せ.

(i)　$x = \max(0, x) - \max(0, -x)$

(ii)　$|x| = \max(0, x) + \max(0, -x)$

(iii)　$\max(0, x, 2x) = 2\max(0, x)$

[4.2]　次を示せ.

(i)　$\max(x, y) = -\min(-x, -y)$

(ii)　$\max(\min(x, y),\ z) = \min(\max(x, z),\ \max(y, z))$

(iii)　$\min(\max(x, y),\ z) = \max(\min(x, z),\ \min(y, z))$

[4.3]　次の関数 $f(x)$ のグラフを描け.

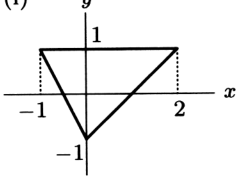
(i)　$f(x) = \max(-x, 2x)$

(ii)　$f(x) = \max(0, x) - \max(0, x-1)$

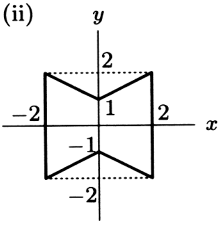
(iii)　$f(x) = \max(0, x+1) - 2\max(0, x) + \max(0, x-1)$

[4.4]　次の多角形を max の方程式で表せ.

(i)



(ii)



[4.5]　次の 2 つの方程式について以下の問に答えよ.

$$X_{n+1} = \max(0, X_n) - X_n - X_{n-1} \tag{a}$$

$$X_{n+1} = \max(0, X_n) - 2X_n - X_{n-1} \tag{b}$$

(i)　$X_0 = 1,\ X_1 = 0$ を初期値として X_n を求めよ.

(ii)　(a), (b) が再帰方程式であることを示せ.

(iii)　(a), (b) の保存量を 1 つ求めよ．

[4.6]　問 4.28 の (ii) で得られた方程式の保存量を求めよ．また，相平面内で保存量が表す多角形を図示せよ．((4.16) の保存量 H を利用するとよい．)

[4.7]　ルール番号 3, 20, 234 の ECA についてそれぞれ以下の問に答えよ．

(i)　$\cdots 001101011100 \cdots$ を $n=0$ での初期状態として $n=3$ まで時間発展を計算せよ．

(ii)　1 が有限個連続している初期状態 $\cdots 0011 \cdots 1100 \cdots$ からどのようなパターンが得られるか．

[4.8]　再帰方程式 (4.11)，すなわち

$$X_{n+1} = \max(0, X_n) - X_{n-1}$$

について，逆超離散化によって得られる差分方程式の候補をいくつか示せ．(4.11) は周期 5 の再帰性があるが，得られた差分方程式にその再帰性はあるか．

[4.9]　0, 1 に関する 2 項演算 $\odot$ を考え，次の表で定義するとする．

x	y	$x \odot y$
0	0	a
0	1	b
1	0	c
1	1	d

(i)　$a \sim d$ がどのような値のとき，$\odot$ で交換則と結合則が成り立つか．

(ii)　交換則と結合則が成り立てば，

$$U_j^{n+1} = U_{j-1}^n \odot U_j^n, \qquad U_j^{n+1} = U_{j-1}^n \odot U_{j+1}^n,$$
$$U_j^{n+1} = U_j^n \odot U_{j+1}^n, \qquad U_j^{n+1} = U_{j-1}^n \odot U_j^n \odot U_{j+1}^n$$

はすべて $\odot$ を和とみなして解の重ね合わせが成り立つ．これにあてはまる ECA のルール番号をすべて答えよ．

第5章

バーガーズ・セルオートマトン

5.1 バーガーズ方程式

いま $f(x,t)$ に関する**拡散方程式**

$$f_t = f_{xx} \tag{5.1}$$

を考える．ここで添え字の t, x はそれぞれの変数に関する偏微分を表し，添え字の個数が微分の階数を表す．つまり f_{xx} は f の x に関する 2 階偏導関数である．さらに，$f(x,t)$ から $u(x,t)$ への変数変換

$$u = (\log f)_x = \frac{f_x}{f} \tag{5.2}$$

を考える．この変数変換は**コール–ホップ変換** (Cole-Hopf transformation) と呼ばれる [41].

(5.1) と (5.2) から u が満たすべき偏微分方程式が導かれる．まず (5.2) の両辺を t で微分すると

$$u_t = \frac{f_{xt}}{f} - \frac{f_x f_t}{f^2}$$

となる．この式の右辺に (5.1) を代入すると

$$u_t = \frac{f_{xxx}}{f} - \frac{f_x f_{xx}}{f^2} \tag{5.3}$$

となる．さらに，右辺を u で表すための準備として (5.2) を x で微分すると

$$u_x = \frac{f_{xx}}{f} - \frac{f_x^2}{f^2}$$
$$u_{xx} = \frac{f_{xxx}}{f} - 3\frac{f_x f_{xx}}{f^2} + 2\frac{f_x^3}{f^3}$$

となる．したがって，これら偏導関数を用いて (5.3) から

$$u_t = 2uu_x + u_{xx}$$

が導かれる．この式は**バーガーズ方程式** (Burgers equation) と呼ばれ，流体の 1 次元衝撃波の運動を記述するモデルとしてよく知られている [42].

以上をまとめると次のような図式が得られる．

$$f_t = f_{xx} \qquad \text{（拡散方程式）} \qquad (5.4)$$
$$\downarrow \quad u = (\log f)_x \qquad \text{（コール–ホップ変換）} \qquad (5.5)$$
$$u_t = 2uu_x + u_{xx} \qquad \text{（バーガーズ方程式）} \qquad (5.6)$$

問 5.1 $w = \log f$ として (5.1) から w に関する偏微分方程式を導け．

問 5.2 α, β, γ を定数として変数のスケール変換 $x = \alpha x'$, $t = \beta t'$, $u = \gamma u'$ を行う．(5.6) を x', t', u' を用いて書き換えよ．

バーガーズ方程式の解を見つけるには，上の図式を利用して拡散方程式の解から作るのが楽である．k, c を任意定数として

$$f = e^{kx+k^2t+c}$$

が拡散方程式の特解になることは代入してすぐにわかる．さらに，拡散方程式の線形性から，k_i, c_i $(1 \le i \le N)$ を任意定数として

$$f = 1 + e^{k_1x+k_1^2t+c_1} + e^{k_2x+k_2^2t+c_2} + \cdots + e^{k_Nx+k_N^2t+c_N}$$

も解になる（1 は $k=c=0$ の場合に相当している）．これをコール–ホップ変換に代入すると

$$u = \frac{k_1 e^{k_1 x + k_1^2 t + c_1} + k_2 e^{k_2 x + k_2^2 t + c_2} + \cdots + k_N e^{k_N x + k_N^2 t + c_N}}{1 + e^{k_1 x + k_1^2 t + c_1} + e^{k_2 x + k_2^2 t + c_2} + \cdots + e^{k_N x + k_N^2 t + c_N}} \tag{5.7}$$

がバーガーズ方程式の解になる．この形の解は特に**衝撃波解**と呼ばれる．$N=1$ の場合は

$$u = \frac{k_1}{1 + e^{-(k_1 x + k_1^2 t + c_1)}}$$

となるので，$k_1 > 0$ のとき任意の時刻において $x \to +\infty$ で $u \to k_1$, $x \to -\infty$ で $u \to 0$ となる．また，u が $x + k_1 t$ にのみ依存する関数となるので，グラフが速さ k_1 で x 軸の負の方向に移動する．$N=1, k_1=1, c_1=0$ の場合の u のグラフを図 5.1 に示す．

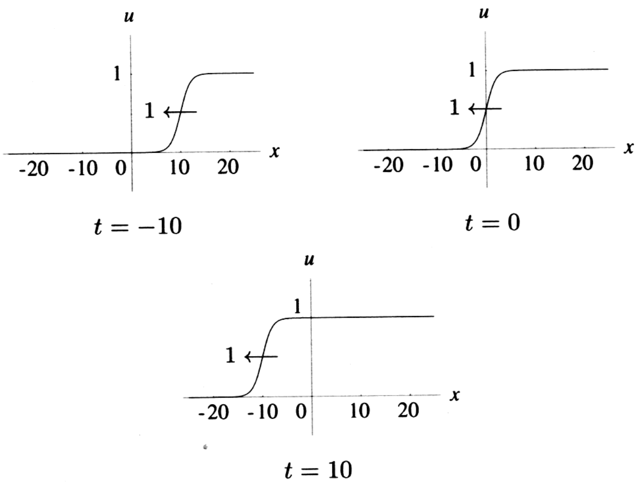


図 5.1　$N=1,\ k_1=1,\ c_1=0$ の場合

$N=2, k_1=1, k_2=2, c_1=c_2=0$ の場合のグラフを図 5.2 に示す．少し計算が必要であるが，$0<k_1<k_2$ ならば任意の時刻で $x \to +\infty$ で $u \to k_2$, $x \to -\infty$ で $u \to 0$ となる．また，$t \ll 0$ の範囲で u のグラフは高さが k_1, k_2 の 2 段の階段の形をしており，それぞれの段が k_1, k_1+k_2 の速さで x 軸の負の方向に進む．ところが時間が経過すると上段が下段に追いついて 1 段のグラフになり，それ以後は速さ k_2 で移動する．

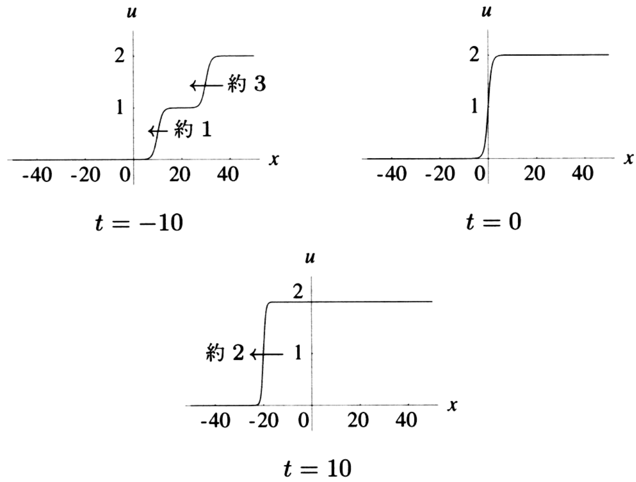


図 5.2　$N = 2,\ k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ c_1 = c_2 = 0$ の場合

問 5.3 (5.7) で $N = 1$ とする．
(i) $c_1 = 0$ の場合と $c_1 = 1$ の場合で解はどう変わるか．
(ii) $k_1 < 0$ の場合に解はどのようになるか．

問 5.4 (5.7) で $N = 2,\ 0 < k_1 < k_2,\ c_1 = c_2 = 0$ とする．
(i) $t \ll 0$ の範囲において，(a) $x \ll -k_1 t$, (b) $-k_1 t \ll x \ll -(k_1 + k_2)t$, (c) $-(k_1 + k_2)t \ll x$ の 3 つの空間領域で u の値を調べよ．
(ii) $t \gg 0$ の範囲において，(d) $x \ll -k_2 t$, (e) $-k_2 t \ll x$ の 2 つの空間領域で u の値を調べよ．

5.2　差分バーガーズ方程式

(5.4)～(5.6) の図式に示したように，バーガーズ方程式はコール–ホップ変換を通じて拡散方程式と結びついた．ここではこの図式をそのまま差分化することを考える [2,43,44]．まず，Δx, Δt をそれぞれ空間格子，時間格子の間

隔とし，拡散方程式の差分化を

$$\frac{1}{\Delta t}(f_j^{n+1} - f_j^n) = \frac{1}{(\Delta x)^2}(f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n) \tag{5.8}$$

としよう．簡単のため $\Delta t/(\Delta x)^2 = 1/2$ として，上式を整理すると

$$f_j^{n+1} = \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_{j-1}^n) \tag{5.9}$$

となる．次にコール–ホップ変換の差分化を

$$u_j^n = \frac{1}{\Delta x}(\log f_{j+1}^n - \log f_j^n) \tag{5.10}$$

とする．式の表示を簡単にするため，u_j^n から v_j^n への変数変換 $v_j^n = e^{\Delta x u_j^n}$ を用いて (5.10) を

$$v_j^n = f_{j+1}^n / f_j^n \tag{5.11}$$

と書き換えておこう．

微分のバーガーズ方程式 (5.6) は拡散方程式 (5.4) とコール–ホップ変換 (5.5) から導かれた．ということは差分の方でも (5.9) と (5.10) あるいは (5.11) から差分バーガーズ方程式を導けるはずである．そこで (5.9) と (5.11) を用いて v_j^n の時間発展方程式を導こう．まず v_j^{n+1} は

$$v_j^{n+1} = \frac{f_{j+1}^{n+1}}{f_j^{n+1}} = \frac{f_{j+2}^n + f_j^n}{f_{j+1}^n + f_{j-1}^n} = \frac{f_{j+1}^n}{f_j^n} \cdot \frac{f_{j+2}^n/f_{j+1}^n + f_j^n/f_{j+1}^n}{f_{j+1}^n/f_j^n + f_{j-1}^n/f_j^n}$$

となる．さらに (5.11) を用いると

$$v_j^{n+1} = v_j^n \frac{v_{j+1}^n + 1/v_j^n}{v_j^n + 1/v_{j-1}^n} \tag{5.12}$$

が得られる．これが**差分バーガーズ方程式**である．結局 (5.9), (5.11), (5.12) をまとめると，差分の方でも以下の図式が得られる．

$$f_j^{n+1} = \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_{j-1}^n) \qquad \text{(差分拡散方程式)} \tag{5.13}$$

$$\downarrow \quad v_j^n = f_{j+1}^n / f_j^n \qquad \text{(差分コール–ホップ変換)} \tag{5.14}$$

$$v_j^{n+1} = v_j^n \frac{v_{j+1}^n + 1/v_j^n}{v_j^n + 1/v_{j-1}^n} \qquad \text{(差分バーガーズ方程式)} \tag{5.15}$$

問 5.5 (5.13)〜(5.15) は $\alpha = \Delta t/(\Delta x)^2 = 1/2$ の特別な場合である．一般の α に対して (5.8) と (5.14) を用いて (5.13)〜(5.15) と同様の図式を作れ．

問 5.6 v_j^n の代わりに u_j^n ($v_j^n = e^{\Delta x u_j^n}$) を用いて (5.15) を $u_j^{n+1} = \cdots$ の形に書き換えよ．

では，差分バーガーズ方程式の衝撃波解はどうなっているであろうか．これも微分方程式の導出方法が参考になる．まず，k, ω, c を定数として，差分拡散方程式 (5.13) の特解を

$$f_j^n = e^{kj+\omega n+c}$$

の形におき (5.13) に代入すると

$$\omega = \log(\cosh k)$$

が導かれる．この k と ω の関係式が満たされる限り，上の特解は (5.13) の解となる．k と ω の上のような関係のことを**分散関係** (dispersion relation) という．なお，$k \neq 0$ ならば $\cosh k > 1$ なので $\omega > 0$ となる．

さらに (5.13) は f に関して線形の差分方程式なので，解の重ね合わせができ，

$$f_j^n = 1 + e^{k_1 j+\omega_1 n+c_1} + e^{k_2 j+\omega_2 n+c_2} + \cdots + e^{k_N j+\omega_N n+c_N}$$

も解となる．ただし k_i, c_i は任意定数で $\omega_i = \log(\cosh k_i)$ である．この解を差分コール–ホップ変換 (5.14) で変換すると (5.15) の解 v_j^n が得られる．

$$v_j^n = \frac{1 + e^{k_1(j+1)+\omega_1 n+c_1} + e^{k_2(j+1)+\omega_2 n+c_2} + \cdots + e^{k_N(j+1)+\omega_N n+c_N}}{1 + e^{k_1 j+\omega_1 n+c_1} + e^{k_2 j+\omega_2 n+c_2} + \cdots + e^{k_N j+\omega_N n+c_N}}$$

$N = 1$, $k_1 = 1$, $c_1 = 0$ の場合の解を図 5.3 に，$N = 2$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $c_1 = c_2 = 0$ の場合の解を図 5.4 に示す．差分解なので j が整数の格子点のところでのみ点を打ってグラフを描いている．

なお，微分バーガーズ方程式の解 $u(x,t)$ との関連は以下のようにして示される．ただし簡単のため，$N = 1$ の場合の

$$v_j^n = \frac{1 + e^{k(j+1)+\omega n+c}}{1 + e^{kj+\omega n+c}}$$

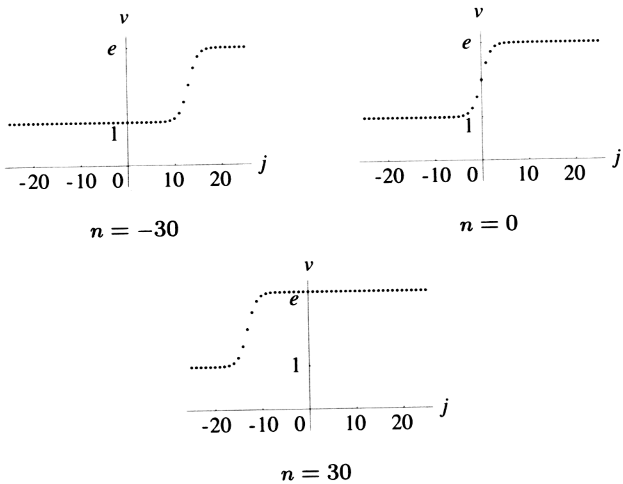


図 5.3 $N = 1,\ k_1 = 1,\ c_1 = 0$ の場合

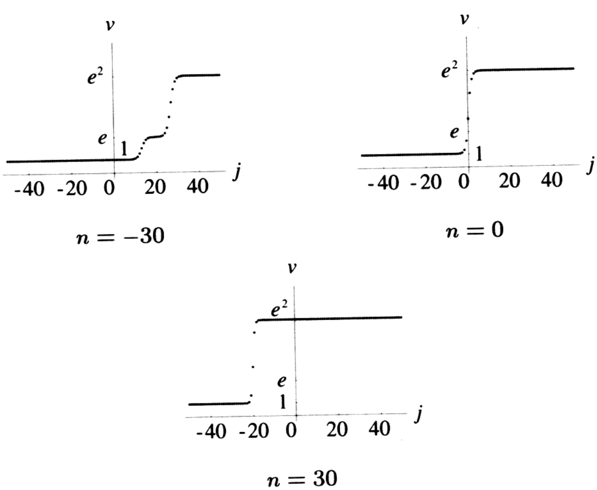


図 5.4 $N = 2,\ k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ c_1 = c_2 = 0$ の場合

についてだけ示す．まず，$k = \Delta x\, k'$, $\omega = \Delta t\, \omega'$, $x = j\Delta x$, $t = n\Delta t$ とおき，$u_j^n = \dfrac{1}{\Delta x} \log v_j^n$ を考慮すると，

$$u_j^n = \tilde{u}(x,t) = \frac{1}{\Delta x}\{\log(1 + e^{k'(x+\Delta x)+\omega' t+c}) - \log(1 + e^{k'x+\omega' t+c})\}$$

となる．したがって $\Delta x \to 0$ の極限で

$$\lim_{\Delta x \to 0} \tilde{u}(x,t) = \frac{d}{dx} \log(1 + e^{k'x+\omega' t+c})$$

となるので微分のバーガーズ方程式の解に収束する．

問 5.7 $N = 1$ の場合，$\displaystyle\lim_{j\to+\infty} v_j^n - \lim_{j\to-\infty} v_j^n$ を求めよ．

5.3　超離散バーガーズ方程式

バーガーズ方程式の差分化の図式が得られたのでいよいよ超離散化を行う [44]．まず ε をパラメータとして (5.13)〜(5.15) の f_j^n, v_j^n から F_j^n, U_j^n への変数変換

$$f_j^n = 2^{-n} e^{F_j^n/\varepsilon}, \qquad v_j^n = e^{(U_j^n - L/2)/\varepsilon}$$

を用いる．v から U への変数変換で用いた L は定数である．この変数変換により (5.13)〜(5.15) は

$$F_j^{n+1} = \varepsilon \log(e^{F_{j+1}^n/\varepsilon} + e^{F_{j-1}^n/\varepsilon}) \tag{5.16}$$

$$\downarrow \quad U_j^n = F_{j+1}^n - F_j^n + \frac{L}{2} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} = U_j^n &+ \varepsilon \log(e^{(U_{j+1}^n - L/2)/\varepsilon} + e^{-(U_j^n - L/2)/\varepsilon}) \\ &- \varepsilon \log(e^{(U_j^n - L/2)/\varepsilon} + e^{-(U_{j-1}^n - L/2)/\varepsilon}) \end{aligned} \tag{5.18}$$

となる．そこで $\varepsilon \to +0$ の極限をとると（(5.22) 参照）

$$F_j^{n+1} = \max(F_{j+1}, F_{j-1}) \qquad \text{（超離散拡散方程式）} \tag{5.19}$$

$$\downarrow \quad U_j^n = F_{j+1}^n - F_j^n + \frac{L}{2} \qquad \text{（超離散コール–ホップ変換）} \tag{5.20}$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \min(U_{j-1}^n,\, L - U_j^n) - \min(U_j^n,\, L - U_{j+1}^n) \tag{5.21}$$

（超離散バーガーズ方程式）

が得られる．(5.18) から $\varepsilon \to +0$ によって

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \max\left(U_{j+1}^n - \frac{L}{2}, -U_j^n + \frac{L}{2}\right) - \max\left(U_j^n - \frac{L}{2}, -U_{j-1}^n + \frac{L}{2}\right) \tag{5.22}$$

が得られるが，それを変形すれば (5.21) が得られる．

問 5.8 (i) (5.22) から (5.21) を導け．
(ii) 超離散化を用いずに (5.19), (5.20) から直接 (5.22) を導け．

問 5.9 問 5.5 で得られた図式を，変換 $f_j^n = \alpha^n e^{F_j^n/\varepsilon}$, $v_j^n = e^{(U_j^n - L/2)/\varepsilon}$, $(1-2\alpha)/\alpha = e^{(\frac{L}{2}-M)/\varepsilon}$ を利用して超離散化せよ．ただし L, M は定数である．

さて，ここで 4.3 節から保留にしていた**超離散化**という言葉の意味について説明しよう．まず (5.21) において $L, U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n$ がすべて整数ならば，U_j^{n+1} も整数になることは明らかである．ということは L が整数で U の初期値もすべて整数なら，以降の任意の時刻の U の値が整数となる．このような性質は (5.21) でたまたま成り立つのではない．一般に超離散化が可能な場合には，得られた式に含まれる演算が max と ± だけなので，係数・定数や初期値が整数である限り，いつでもこのようなことが可能になる．

以上のことから変数の離散化について以下の図式がしばしば成り立つ．

	微分方程式	差分方程式	超離散方程式
独立変数	連続	離散	離散
従属変数	連続	連続	離散

つまり，差分化で微分方程式の独立変数の離散化を行い，超離散化で従属変数の離散化を行うことで，あらゆる変数の離散化が完成する．このような究極的な離散化という意味合いから「離散化」に「超」をつけて超離散化としたのである．

なお，係数や定数そして初期値を整数にする必然性は，超離散方程式自身から導かれるものではない．しかしながら，超離散方程式によって表されるデジタルなメカニズムと微分方程式によって表されるアナログのメカニズム

とが上の図式によって関連づけられることで，予想外の興味深い物の見方が可能となる．以降では，本章でバーガーズ方程式，次章でロトカ-ボルテラ方程式についてデジタルとアナログの意外な結びつきを具体的に紹介していく．

5.4　衝撃波解

衝撃波解は超離散バーガーズ方程式に存在するのであろうか．これを知るために，まず超離散拡散方程式 (5.19) の特解として $F_j^n = Kj + \Omega n + C$ の形のものを考える．これを (5.19) に代入すると，

$$Kj + \Omega(n+1) + C = \max(K(j+1) + \Omega n + C, K(j-1) + \Omega n + C)$$

が得られる．したがって分散関係

$$\Omega = \max(K, -K) = |K| \tag{5.23}$$

が満たされていれば特解になる．

ところで，微分および差分の拡散方程式では方程式の線形性から解の重ね合わせが可能であった．たとえば差分拡散方程式 (5.13) では，g_j^n と h_j^n が解ならその和 $f_j^n = g_j^n + h_j^n$ も解になる．同じことを超離散拡散方程式で行ってみよう．まず，G_j^n と H_j^n が (5.19) の解とし，$F_j^n = G_j^n + H_j^n$ とする．これを (5.19) に代入すると，左辺は

$$\begin{aligned} F_j^{n+1} &= G_j^{n+1} + H_j^{n+1} = \max(G_{j+1}^n, G_{j-1}^n) + \max(H_{j+1}^n, H_{j-1}^n) \\ &= \max(G_{j+1}^n + H_{j+1}^n, G_{j+1}^n + H_{j-1}^n, G_{j-1}^n + H_{j+1}^n, G_{j-1}^n + H_{j-1}^n) \end{aligned} \tag{5.24}$$

となり，右辺は

$$\max(F_{j+1}^n, F_{j-1}^n) = \max(G_{j+1}^n + H_{j+1}^n, G_{j-1}^n + H_{j-1}^n) \tag{5.25}$$

となり，一般に一致しない．つまり解の重ね合わせで + 演算を使っては解にならないのである．

問 5.10　(5.24), (5.25) の右辺が一致するためには G_j^n, H_j^n がどのような条件を満たす必要があるか．

前に述べたが，実は超離散の世界では + 演算ではなく max 演算が和の役割を果たしている．そこで，今度は $F_j^n = \max(G_j^n, H_j^n)$ としてみよう．これを (5.19) に代入すると，左辺は

$$\begin{aligned} F_j^{n+1} &= \max(G_j^{n+1}, H_j^{n+1}) = \max(\max(G_{j+1}^n, G_{j-1}^n), \max(H_{j+1}^n, H_{j-1}^n)) \\ &= \max(G_{j+1}^n, G_{j-1}^n, H_{j+1}^n, H_{j-1}^n) \end{aligned}$$

となり，右辺は

$$\begin{aligned} \max(F_{j+1}^n, F_{j-1}^n) &= \max(\max(G_{j+1}^n, H_{j+1}^n), \max(G_{j-1}^n, H_{j-1}^n)) \\ &= \max(G_{j+1}^n, H_{j+1}^n, G_{j-1}^n, H_{j-1}^n) \end{aligned}$$

となって両者は常に一致する．これで解の重ね合わせがうまくいった．

問 5.11 線形の方程式では解を定数倍したものも解になる．(5.13) で g_j^n が解なら ag_j^n も解になる．(5.19) でこれに対応する法則は何か．

(5.19) の特解 $Kj + |K|n + C$ をいくつか重ね合わせよう．K_i, C_i をすべて任意定数として

$$F_j^n = \max(0, K_1 j + |K_1|n + C_1, \ldots, K_N j + |K_N|n + C_N)$$

とする．max の中の 0 は，$K = C = 0$ という特別な場合の解である．この解から超離散バーガーズ方程式 (5.21) の解が (5.20) を通じて得られる．

$$\begin{aligned} U_j^n &= F_{j+1}^n - F_j^n + \frac{L}{2} \\ &= \max(0, K_1(j+1) + |K_1|n + C_1, \ldots, K_N(j+1) + |K_N|n + C_N) \\ &\quad - \max(0, K_1 j + |K_1|n + C_1, \ldots, K_N j + |K_N|n + C_N) + \frac{L}{2} \end{aligned} \tag{5.26}$$

$L = 0$, $N = 1$, $K_1 = 1$, $C_1 = 0$ の場合の解を図 5.5 に，$L = 0$, $N = 2$, $K_1 = 1$, $K_2 = 2$, $C_1 = 4$, $C_2 = 0$ の場合の解を図 5.6 に示す．

図 5.5 では微分・差分方程式の場合に得られた衝撃波解と同様の解が再現できている．ところが，図 5.6 では 2 段の衝撃波がともに −1 の速さであり，いつまでも 1 段にならない．この点が微分・差分の場合と明らかに異なってい

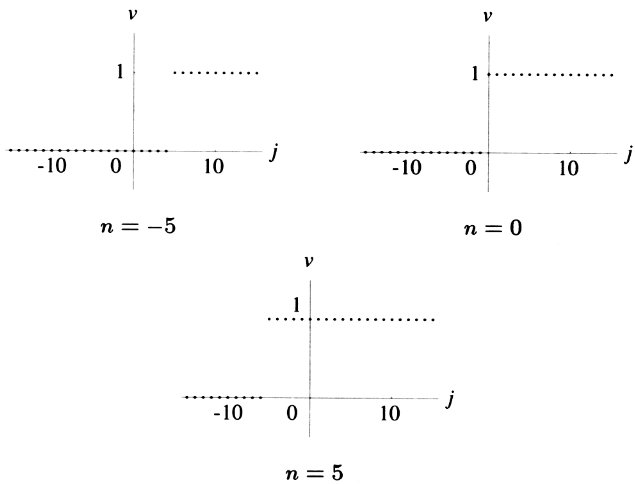


図 5.5　$L = 0,\ N = 1,\ K_1 = 1,\ C_1 = 0$ の場合

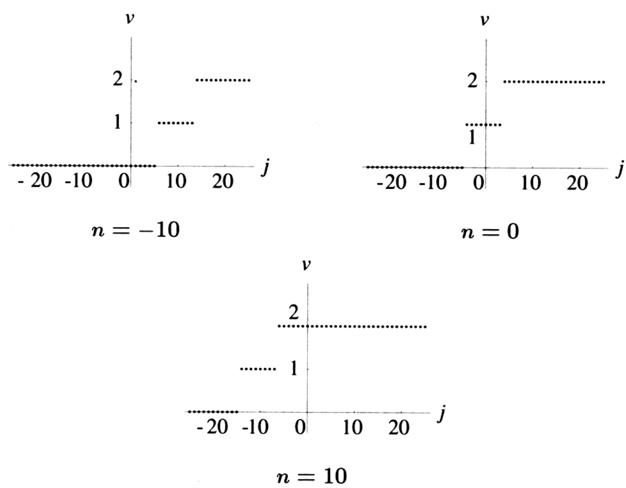


図 5.6　$L = 0,\ N = 2,\ K_1 = 1,\ K_2 = 2,\ C_1 = 4,\ C_2 = 0$ の場合

る．このことは，分散関係 (5.23) より波の速さが $\Omega/K = |K|/K$ であり，$+1$ か -1 の 2 種類しかないことに由来する．

以上のように，微分・差分の方程式で見られた多段状の衝撃波の融合という特徴が，超離散化という極限操作によって失われた．しかしながら，その極限操作によって微分・差分の方程式で観察できない特徴のある解を作ることができる．次節ではその解について触れる．

問 5.12 $F_j^n = Kj + |K|n + C$ も (5.19) の解である．このときの U_j^n はどうなるか．

問 5.13 (5.26) について以下の問に答えよ．
(i) $L=0,\ N=1,\ K_1=-2,\ C_1=0$ のときの解 U_j^n を調べよ．
(ii) $L=0,\ N=2,\ K_1=-2,\ K_2=1,\ C_1=C_2=0$ のときの解 U_j^n を調べよ．

5.5　バーガーズ・セルオートマトン

超離散バーガーズ方程式 (5.21) で，任意の j に対して $0 \le U_j^n \le L$ であると仮定しよう．(5.21) の右辺を変形すると

$$U_j^{n+1} = \min(U_j^n + U_{j-1}^n,\ L) - \min(U_j^n,\ L - U_{j+1}^n)$$

となる．右辺第 1 項の min は L 以下であり，上の仮定より第 2 項の min は 0 以上であるので，U_j^{n+1} は L 以下の値になる．さらに (5.21) の右辺を別の形に変形して

$$U_j^{n+1} = \min(U_{j-1}^n,\ L - U_j^n) - \min(0, L - U_j^n - U_{j+1}^n)$$

とすると，右辺第 1 項の min は上の仮定より 0 以上であり，第 2 項の min は 0 以下であるので，U_j^{n+1} が 0 以上の値になる．結局，$0 \le U_j^n \le L$ ならば $0 \le U_j^{n+1} \le L$ ということが示された．さらに，任意の j で U_j^n が整数なら U_j^{n+1} も整数となる．ということは，もし初期時刻 $n=0$ で U_j^0 の値をすべて 0 から L までの整数だけで与えたら，それ以降の任意の時刻でも U_j^n が 0 から L までの整数値しかとらない．

以上のことから，超離散バーガーズ方程式 (5.21) は初期値に制限を設けることで 4.8 節で述べたセルオートマトン (CA) になる．この CA を**バーガーズ・セルオートマトン** (BCA) と呼ぶことにする．最も簡単な $L = 1$ の場合にどのような CA になるかを考えよう．U の値を 0, 1 に限定して (5.21) を CA のルール表で書き換えると，

$U_{j-1}^n U_j^n U_{j+1}^n$	111	110	101	100	011	010	001	000
U_j^{n+1}	1	0	1	1	1	0	0	0

(5.27)

となる．ルール表の下段の 0, 1 の並びから，この CA がルール番号 $(10111000)_2 = 184$ の ECA になっていることがわかる．以降では，この ECA を BCA1 と呼ぶことにする．

$n = 0$ で初期値 U_j^0 を適当に定め，上のルール (5.27) で時間発展を計算した結果を図 5.7 に示す．図 5.7 (a), (b) とも□, ■がそれぞれ 0, 1 の値を示し，時間軸は下向きで最も上の行が初期値 U_j^0 を表す．また，左右の境界には周期境界条件を適用している．つまり，空間方向 1 周期分の格子点数を K とすると，任意の j, n に対して $U_{j+K}^n = U_j^n$ が成り立つ．

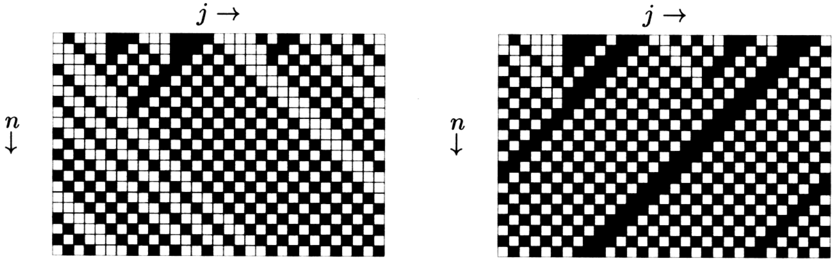


図 5.7　BCA1（= ルール番号 184 の ECA）の時間発展

問 5.14　周期境界条件のもとで (i) 010001110, (ii) 010011110 を初期状態として BCA1 の時間発展を調べよ．

問 5.15 BCA1 は時間を逆にたどることができるか．すなわち，n での状態が与えられたときに $n-1$ の状態を一意的に決めることができるか．

BCA1 の時間発展は，ルール表を覚えなくても簡単に計算できる．まず U_j^n の値を時刻 n, 格子 j に存在する車の台数だと想定する．台数は 1（車がいる）か 0（いない）のどちらかである．そして，格子点 j にいる車は右側が空いている ($U_{j+1}^n = 0$) ならば次の時刻で右へ進み，空いていない ($U_{j+1}^n = 1$) ならばその場にとどまる，というルールで動くとする．この動きは超離散バーガーズ方程式の各項を

$$\underbrace{U_j^{n+1}}_{\text{次の時刻の台数}} = \underbrace{U_j^n}_{\text{現在の台数}} + \underbrace{\min(U_{j-1}^n, 1-U_j^n)}_{j-1\text{ から }j\text{ への流入量}} - \underbrace{\min(U_j^n, 1-U_{j+1}^n)}_{j\text{ から }j+1\text{ への流出量}} \tag{5.28}$$

と考えればよくわかる．そう見なすと，図 5.7 (a) では初期時刻から十分時間が経過すると車がお互いじゃませずに自由に動く様子が現れ，(b) では渋滞（幅が 2 格子分以上の黒い帯の部分）が発生して渋滞の先頭から車が抜け出し，後ろから車が突入する様子が現れていると考えられる．実際，BCA を**交通流**のシミュレータの基礎にする研究も数多くなされている [45–49].

問 5.16 上で述べた車の動きが BCA1 のルール表 (5.27) と矛盾しないことを確かめよ．

問 5.17 $L > 1$ の場合の BCA (5.21) は，どのような交通流のモデルを表しているか．(ヒント：各格子点に L 台までの車が共存できると想定すればよい．)

5.6 バーガーズ・セルオートマトンの性質

実は，BCA1 には以下の性質がある．

(i) 1 の個数が保存する

(ii) 一般に初期状態からしばらくは 0–1 パターンに複雑な変化が見られるが，時間が経つと右ずれあるいは左ずれパターンに必ず落ち着く

実際，図 5.7 (a), (b) では 1 の個数がそれぞれ 13, 17 個であり時間が経っても変わらない．また，(a) の方では時間が経つと右ずれパターンに落ち着き，(b) では左ずれパターンに落ち着いている．

上の性質を超離散方程式 (5.28) を用いて証明できる．なお，同様の性質を $L = 1$ 以外の BCA についても示すことができるが，ここでは証明の見通しをよくするために $L = 1$ の場合のみ示す．前に述べたように BCA1 の時間変化は車の動きで表すことができ，車が増えたり減ったりしないのであるから，(i) の性質が成り立つのは当然であるが，(5.28) を用いて式の上で (i), (ii) を示してみよう．

1 周期分の格子点数を K とすると，(i) は $\sum_{j=1}^{K} U_j^n$ が時間 n によらず一定であることと同じである．そこで (5.28) の両辺に $\sum_{j=1}^{K}$ をほどこすと

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{K} U_j^{n+1} &= \sum_{j=1}^{K} U_j^n + \sum_{j=1}^{K}\Big(\min(U_{j-1}^n, 1 - U_j^n) - \min(U_j^n, 1 - U_{j+1}^n)\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{K} U_j^n + \min(U_0^n, 1 - U_1^n) - \min(U_K^n, 1 - U_{K+1}^n)
\end{aligned}
$$

となり，周期性より $U_{j+K}^n = U_j^n$ が任意の j, n で成り立つので，右辺の 2 つの min の項が打ち消し合って

$$
\sum_{j=1}^{K} U_j^{n+1} = \sum_{j=1}^{K} U_j^n
$$

となる．これで (i) が示された．

(ii) はもう少し複雑な証明を要する．このために，超離散バーガーズ方程式の図式を $L = 1$ の場合に対して改めて以下に示す．

$$
F_j^{n+1} = \max(F_{j+1}^n, F_{j-1}^n) \qquad \text{（超離散拡散方程式）} \tag{5.29}
$$

$$
\downarrow \quad U_j^n = F_{j+1}^n - F_j^n + \frac{1}{2} \qquad \text{（超離散コール–ホップ変換）} \tag{5.30}
$$

$$
\begin{aligned}
U_j^{n+1} = U_j^n &+ \min(U_{j-1}^n,\, 1 - U_j^n) \qquad \text{（超離散バーガーズ方程式）} \\
&- \min(U_j^n,\, 1 - U_{j+1}^n)
\end{aligned} \tag{5.31}
$$

(5.29) を繰り返し用いることにより

$$\begin{aligned} F_j^n &= \max(F_{j+1}^{n-1}, F_{j-1}^{n-1}) \\ &= \max(\max(F_{j+2}^{n-2}, F_j^{n-2}), \max(F_j^{n-2}, F_{j-2}^{n-2})) \\ &= \max(F_{j+2}^{n-2}, F_j^{n-2}, F_{j-2}^{n-2}) \\ &= \max(F_{j+3}^{n-3}, F_{j+1}^{n-3}, F_{j-1}^{n-3}, F_{j-3}^{n-3}) \\ &\ \vdots \\ &= \max(F_{j+n}^0, F_{j+n-2}^0, \ldots, F_{j-n+2}^0, F_{j-n}^0) \end{aligned}$$

となる．つまり，F_j^n の値を

$$F_j^n = \max(F_{j+n}^0, F_{j+n-2}^0, \ldots, F_{j-n+2}^0, F_{j-n}^0) \tag{5.32}$$

によって初期値 F_j^0 から計算することができる．

また，(5.30) より

$$\begin{aligned} F_{j+K}^0 - F_j^0 &= (F_{j+K}^0 - F_{j+K-1}^0) + (F_{j+K-1}^0 - F_{j+K-2}^0) + \cdots + (F_{j+1}^0 - F_j^0) \\ &= \sum_{i=j}^{j+K-1} \left(U_i^0 - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

となる．さらに，U_j^n に関しては空間方向に周期 K の周期性を仮定しているので，

$$F_{j+K}^0 - F_j^0 = \sum_{i=1}^{K} \left(U_i^0 - \frac{1}{2} \right) = K \left(\rho - \frac{1}{2} \right)$$

となる．ただし，ρ は

$$\rho = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} U_i^0$$

で定義され，U_j^0 の 1 空間格子あたりの平均値である．(i) よりこの量は時間 n によらない定数であり，$0 \leq \rho \leq 1$ を満たす．結局，任意の j に対して

$$\begin{cases} F_{j+K}^0 < F_j^0 & (\rho < 1/2) \\ F_{j+K}^0 = F_j^0 & (\rho = 1/2) \\ F_{j+K}^0 > F_j^0 & (\rho > 1/2) \end{cases} \tag{5.33}$$

となる．

問 5.18 $U_j^0 = j \bmod 3$, $F_0^0 = 0$ とする．(5.30) から F_j^0 を求めよ．

(5.33) の条件を (5.32) にあてはめて考えよう．まず $\rho < 1/2$ の場合であるが，初期時刻から十分時間がたった後 $(n \gg 0)$ では (5.32) を

$$F_j^n = \max(\underbrace{\ldots, F_{j+n+4}^0, F_{j+n+2}^0,}_{\text{新たな項}} F_{j+n}^0, F_{j+n-2}^0, \ldots, F_{j-n+2}^0, F_{j-n}^0)$$

と書き換えられる，つまり右辺の max に上のように新たな項を付け加えることができる．なぜなら (5.33) より $F_{j+K}^0 < F_j^0$ が成り立ち，n が十分に大きいので，新たな項 $F_{j+n+2}^0, F_{j+n+4}^0, \ldots$ のそれぞれよりも大きな項が，元々max に入っていた項 $F_{j+n}^0, \ldots, F_{j-n}^0$ の中に必ず存在するからである．すると，右辺が $j-n$ にしか依存しない形なので，左辺の F_j^n について

$$F_j^{n+1} = F_{j-1}^n$$

が成立する．ということは $U_j^n = F_{j+1}^n - F_j^n + 1/2$ も

$$U_j^{n+1} = U_{j-1}^n$$

を満足する．つまり，右ずれパターンとなるのである．

同様にして $\rho > 1/2$ の場合は $n \gg 0$ で

$$F_j^n = \max(F_{j+n}^0, F_{j+n-2}^0, \ldots, F_{j-n+2}^0, F_{j-n}^0, \underbrace{F_{j-n-2}^0, F_{j-n-4}^0, \ldots}_{\text{新たな項}})$$

が成立し，$F_j^{n+1} = F_{j+1}^n$ すなわち $U_j^{n+1} = U_{j+1}^n$ となって，左ずれパターンが生まれる．以上をまとめると，

> $n \gg 0$ すなわち十分時間がたった後，U_j^n の空間平均値 ρ が 1/2 より小さいときは右ずれパターン $(U_j^{n+1} = U_{j-1}^n)$ に落ち着き，大きいときは左ずれパターン $(U_j^{n+1} = U_{j+1}^n)$ に落ち着く

ということが結論できる．

問 5.19 $\rho = 1/2$ のとき $n \gg 0$ でどのようなパターンに落ち着くか．

5.7 信号機付きバーガーズ・セルオートマトン

(5.4)〜(5.6) の図式は以下のように拡張できる．

$$f_t = f_{xx} + \eta f \qquad \text{(ノイズ付き拡散方程式)} \tag{5.34}$$

$$\downarrow \quad u = (\log f)_x \qquad \text{(コール–ホップ変換)} \tag{5.35}$$

$$u_t = 2uu_x + u_{xx} + \eta_x \qquad \text{(ノイズ付きバーガーズ方程式)} \tag{5.36}$$

ここで η は x, t に依存する任意関数であり，方程式に対する摂動効果を表している．

問 5.20 (5.34) と (5.35) から (5.36) を導け．

この方程式を差分化するには，前と同様に，まず線形方程式 (5.34) の差分化を行う．

$$\frac{1}{\Delta t}(f_j^{n+1} - f_j^n) = \frac{1}{(\Delta x)^2}(f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n) + \eta_j^n f_j^n$$

この式を整理すると

$$f_j^{n+1} = \alpha f_{j+1}^n + (1 - 2\alpha + \Delta t\, \eta_j^n) f_j^n + \alpha f_{j-1}^n$$

となる．ただし $\alpha = \Delta t/(\Delta x)^2$ である．さらにコール–ホップ変換 (5.35) の差分化は前と同じで

$$v_j^n (= e^{\Delta x u_j^n}) = f_{j+1}^n / f_j^n$$

とする．この 2 つの式を用いると，以下のような差分方程式の図式が得られる．

$$f_j^{n+1} = \alpha(f_{j+1}^n + \beta_j^n f_j^n + f_{j-1}^n) \qquad \text{(ノイズ付き差分拡散方程式)} \tag{5.37}$$

$$\downarrow \quad v_j^n = f_{j+1}^n / f_j^n \qquad \text{(差分コール–ホップ変換)} \tag{5.38}$$

$$v_j^{n+1} = v_j^n \frac{v_{j+1}^n + \beta_{j+1}^n + 1/v_j^n}{v_j^n + \beta_j^n + 1/v_{j-1}^n} \qquad \text{(ノイズ付き差分バーガーズ方程式)} \tag{5.39}$$

ここで $\beta_j^n = (1 - 2\alpha + \Delta t\, \eta_j^n)/\alpha$ である．

問 5.21 (5.37) と (5.38) から (5.39) を導け.

差分化ができたので今度は超離散化を行う．変数変換

$$f_j^n = \alpha^n e^{F_j^n/\varepsilon}, \quad v_j^n = e^{(U_j^n - \frac{L}{2})/\varepsilon}, \quad \beta_j^n = e^{(\frac{L}{2} - M_j^n)/\varepsilon}$$

を用いて，$\varepsilon \to +0$ の極限をとると以下の超離散方程式の図式が得られる．

$$F_j^{n+1} = \max\left(F_{j+1}^n, F_j^n + \frac{L}{2} - M_j^n, F_{j-1}^n\right) \tag{5.40}$$

（ノイズ付き超離散拡散方程式）

$$\downarrow \quad U_j^n = F_{j+1}^n - F_j^n + \frac{L}{2} \qquad \text{（超離散コール–ホップ変換）} \tag{5.41}$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \min(M_j^n, U_{j-1}^n, L - U_j^n) - \min(M_{j+1}^n, U_j^n, L - U_{j+1}^n) \tag{5.42}$$

（ノイズ付き超離散バーガーズ方程式）

問 5.22 (5.40) と (5.41) から (5.42) を導け.

(5.42) と (5.21) の違いは min の項に M_j^n が入っているか否かである．この M_j^n の項の意味を交通流モデルで解釈しよう．(5.42) 右辺第 2 項は以下のように書き換えることができる．

$$\min(M_j^n, U_{j-1}^n, L - U_j^n) = \min(M_j^n, \min(U_{j-1}^n, L - U_j^n))$$

各格子点には最大 L 台の車が収容できるとすると，$\min(U_{j-1}^n, L - U_j^n)$ は格子点 $j-1$ での車が j での空きに移れるだけ移ったときの流入量である．この流入量が M_j^n を越えると M_j^n に制限されてしまう．M_j^n は時刻 n，格子点 j で自由に設定できる外部変数なので，$0 \le M_j^n \le L$ の範囲で適当に設定すれば，それは格子点 $j-1$ から j への交通量を制限する信号機とみなすことができる．以上のようにしてノイズ付き超離散バーガーズ方程式が**信号機付き交通流モデル**と解釈できるのである [50].

なお，上述の交通流モデルの解釈からも明らかであるが，任意の j に対して $0 \le U_j^n \le L$, $0 \le M_j^n$ とすると，$0 \le U_j^{n+1} \le L$ になる．したがって，この

条件のもとで U_j^n, M_j^n がすべて整数ならば (5.42) はセルオートマトン（信号機付き BCA）になる．

問 5.23 (i) 任意の j で $0 \le U_j^n \le L$, $0 \le M_j^n$ なら $0 \le U_j^{n+1} \le L$ になることを (5.42) から式の上で証明せよ．
(ii) さらに $L \le M_j^n$ なら (5.42) は (5.21) に等価であることを示せ．

では，議論を簡単にするために $L=1$ とし M_j^n は0か1の値をとるとしよう．$M_j^n=0$ のときはサイト $j-1$ と j との間の信号が赤信号，1のときは青信号であると解釈できる．すると，格子点 $j-1$ から j への流入量 $\min(M_j^n, U_{j-1}^n, 1-U_j^n)$ は $M_j^n=1$, $U_{j-1}^n=1$, $U_j^n=0$ のときだけ1になり，それ以外の場合は0となる．すなわち，「信号が青で，$j-1$ に車がいて，j に車がいない」ときだけ，$j-1$ の車は j に進むことができる．

図 5.8 に，(5.42) の $L=1$ の場合の解を2つ示す．(a) の図では，$j=17, 18$ 間の信号機の点滅が「青赤赤赤」，$j=24, 25$ 間で「青赤赤」を周期的に繰り返し，それ以外の格子点では常に青信号であるように設定している．(b) の図では，$j=17, 18$ 間で「青青青赤」，$j=24, 25$ 間で「青赤赤」，それ以外は常に青になるように設定している．また両図とも車の初期配置は同じである．

(a) の図では時間が経つと $j=24, 25$ 間の信号機の左側の渋滞は解消し，$j=17, 18$ 間の渋滞が左に長く延びている．(b) の図では $j=24, 25$ 間の信号機の左側の渋滞が長く延び，$j=17, 18$ 間の信号機を越えてさらに左に延びている．また両図とも，十分時間が経過すると，周期的に変化する解に到達している．信号機の車の通過能力を考えると，両図の違いを大まかに理解できる．(a) では $j=17, 18$ 間の信号機が，1時刻あたり平均すると 1/4 台しか車を通せず，$j=24, 25$ 間では平均 1/3 台が通過できるので，渋滞が最終的に $j=17$ から左に延びる．逆に (b) では信号機の車の通過能力が逆転するので，$j=24$ から左に渋滞が延びる．

問 5.24 $L=1$ とし，$U_j^n=U_{j+5}^n$, $M_j^n=M_{j+5}^n$ の周期境界条件のもとで，$(U_1^0, U_2^0, \ldots, U_5^0)=(1,1,1,0,0)$ の初期条件を与える．$1 \le j \le 5$ の範囲で $M_j^n=1$ $(j \ne 4)$, $M_4^n = n \bmod 2$ としたとき，U_j^n はどのようなパターンになるか．

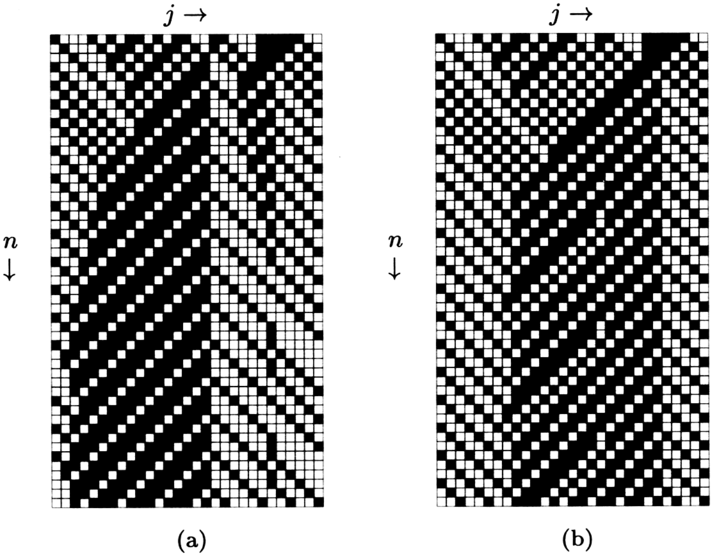


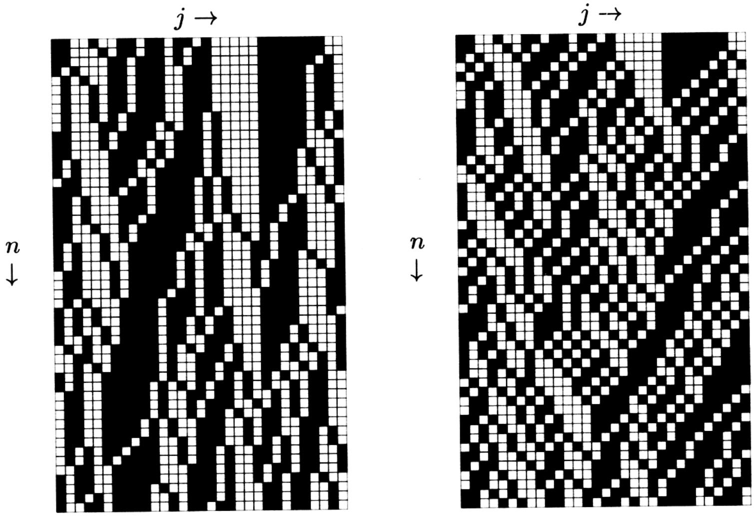
図 5.8　信号機付き BCA の時間発展 (a) $j = 17$, 18 間で青赤赤赤，$j = 24$, 25 間で青赤赤，(b) $j = 17$, 18 間で青青青赤，$j = 24$, 25 間で青赤赤（両図とも左端が $j = 1$）

5.8　確率バーガーズ・セルオートマトン

ノイズ付き超離散バーガーズ方程式 (5.42) の外部変数 M_j^n は U_j^n に無関係に自由に設定することができた．ということは，この変数を確率変数にすることも可能である．簡単のため $L = 1$ とし，以下のように M_j^n を設定しよう．

$$M_j^n = \begin{cases} 1 & （確率\ \alpha） \\ 0 & （確率\ 1-\alpha） \end{cases}$$

$\alpha = 0.3, 0.7$ の 2 つの場合について乱数を用い，同じ初期値に対して数値計算した結果を図 5.9 に示す．



(a) (b)

図 5.9 確率 BCA の時間発展 (a) $\alpha = 0.3$, (b) $\alpha = 0.7$

M_j^n が確率変数なので定常解や周期解に落ち着くことはない．しかし，$\alpha = 0.7$ の方が $\alpha = 0.3$ に比べて青信号になる確率が高く，車の平均速度は (b) の方が明らかに大きい．

上の結果は乱数による無秩序なパターンに見える．ところが，格子点数無限大の極限で車の速度の時空間平均をとると，きれいな結果が得られる．$L = 1$ の場合に格子点数を無限大にし，1 格子点あたりの車の平均台数を ρ, 平均速度を $\bar{q}$ とすると，$n \to \infty$ で以下の関係式を理論的に導くことができる（証明は省略する）．

$$\bar{q} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4\alpha\rho(1-\rho)}\right) \tag{5.43}$$

格子点数が 1000 の場合に，乱数によって与えた初期条件から $n = 20000$ まで数値計算し，$n = 10001$ から 20000 までの平均速度を算出した結果と，理論式 (5.43) との比較を図 5.10 に示す．数値結果が理論値にほぼ等しいことがわかる [50, 52]．

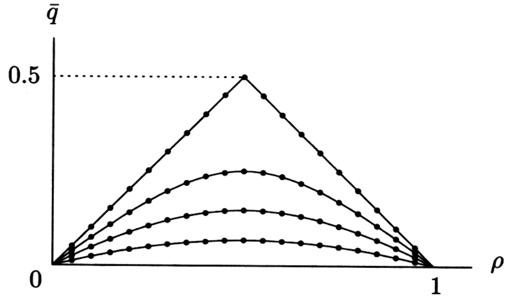


図 5.10　確率 BCA の平均台数 ρ と平均速度 $\bar{q}$ の関係．上から $\alpha = 1, 0.75, 0.5, 0.25$ で，実線が理論値，黒丸が数値計算．

■ 数列の加速法

和算の開祖，関孝和 (1640?～1708) の業績の 1 つに円周率の計算法がある [51]．直径 1 の円に内接する正 2^n 角形の周の長さ s_n を $n = 2, 3, \ldots$ と順に計算し，数列

$$s_{15} = 3.14159\ 26487\ 76985\ 6708$$
$$s_{16} = 3.14159\ 26523\ 86591\ 3571$$
$$s_{17} = 3.14159\ 26532\ 88992\ 7759$$

を得た．和算家達は当時世界最速の計算機であった算盤を駆使してこのような結果を得たものと推定される．その当時の習慣では,「酌清の法」（濁ったものの中から上澄みを酌みだす，すなわち，近似を進めても数値が変わらない部分を取り出す方法）にしたがって正しい数値を判定した．この場合 3.14159 265 である．

関孝和が凄いのはこの数列のみを使って，より正しい答え（より近似の高い値）を推定したことである．彼は次式

$$\begin{aligned} t_{15} &= s_{16} + \frac{(s_{16} - s_{15})(s_{17} - s_{16})}{(s_{16} - s_{15}) - (s_{17} - s_{16})} \\ &= 3.14159\ 26535\ 89793\ 2476 \end{aligned}$$

を計算し，円周率として 3.14159 26535 9 微弱を採用した．t_{15} は小数点以下 16 桁まで正しく求まっている．

このように数列の収束を加速させる方法は**加速法**と呼ばれている．筆者（広田）が加速法に興味を抱いたのは，純粋に数学的興味から作った離散 KdV 方程式が，加速法の 1 つとしてとして有名な ϵ 算法に等価であることが Papageorgiou 等によって発見された（1995 年）からである．

当時の測定技術から推定してせいぜい 5, 6 桁で十分な円周率の値を 9 桁まで計算し，さらに加速法を使って 16 桁まで正しい数値を得た関孝和の努力の背後には「円周率とは何か？」という純粋数学的思考があったと思われる．

関孝和から 200 年近く経って 1876 年にヨーロッパで Aitken Δ^2 法と呼ばれている加速法が発見された．最近，加速法の大家フランスの C. Brezinski によって関孝和の方法は Aitken Δ^2 法に等しいことが指摘された．国際会議で Brezinski に会ったとき，日本人も知らない関孝和の業績をどうして知っているのかと尋ねたら，D.E.Smith, Y.Mikami：*A History of Japanese Mathematics* (Open Curt, 1914) を読んだからとの返事であった．

章末問題

[5.1]　$f(x,t)$, $u(x,t)$ が $f_t = f_{xxx}$, $u = (\log f)_x$ を満たしているとする．

(i) f_{xxxx}/f を u, u_x, u_{xx}, u_{xxx} で表せ．

(ii) u に関する偏微分方程式を導け．

(iii) k, ω を定数として $f(x,t) = 1 + e^{kx+\omega t}$ の形の解を考える．k と ω が満たすべき関係を示し，このときの $u(x,t)$ のふるまいを調べよ．

[5.2]　$L = 2$ の場合の BCA (5.21) を考える．周期境界条件のもとで，(i) 002110121, (ii) 022121101 を初期状態として時間発展を調べよ．

[5.3]　(i) (a) $V_j^n = L - U_j^n$, (b) $V_j^n = U_{-j}^n$ としたとき，(5.21) から V_j^n に関する方程式をそれぞれ導け．

(ii) 交通流モデルにおいて，(a), (b) の V_j^n はそれぞれどのような意味があるか．

[5.4]　BCA1 (5.28) に対して，1 周期分の格子点数を K とする周期境界条件を考える．

(i) $P^n = \sum_{j=1}^{K} \min(U_j^n, 1 - U_{j+1}^n)$ とする．交通流モデルにおいて P^n は何を意味するか．

(ii) 次式を示せ．

$$P^{n+1} = \sum_{j=1}^{K} [\min(2,\ 1 + U_{j+1}^n + U_{j+2}^n,\ U_{j-1}^n + U_j^n + U_{j+1}^n + U_{j+2}^n) \\ - 2U_j^n - \min(U_j^n,\ 1 - U_{j+1}^n)]$$

(iii) 任意の n に対して $P^{n+1} \geq P^n$ が成り立つことを示せ．
（ヒント：(ii), (iii) では周期性をうまく考慮するとよいであろう.）

[5.5]　周期境界条件を与えた BCA1 (5.28) において $\rho < 1/2$, $\rho > 1/2$ のとき $n \gg 0$ でそれぞれ $U_j^{n+1} = U_{j-1}^n$, $U_j^{n+1} = U_{j+1}^n$ になることを本文で示した．このときに出現する 0–1 パターンについて以下の問に答えよ．

(i) $n \gg 0$ で，$\rho < 1/2$ のとき $\min(0,\ 1 - U_j^n - U_{j+1}^n)$, $\rho > 1/2$ のとき $\min(U_j^n + U_{j+1}^n,\ 1)$ がそれぞれ j, n によらない定数になることを示せ．

(ii) (i) より $n \gg 0$ で出現する 0–1 パターンに対する条件を求めよ．

(iii) 逆にある時刻 N で (ii) の条件が満たされているとき，$n \geq N$ で $U_j^{n+1} = U_{j-1}^n$

$(U_j^{n+1} = U_{j+1}^n)$ となることを示せ．

第6章

箱玉系とロトカ–ボルテラ方程式

6.1　箱玉系の定義

箱と玉の系 (box and ball system)，略して**箱玉系** (BBS) は以下のように定義される [6,27,53]．まず，同じサイズ，同じ外観の玉を適当な個数用意する．また，その玉を 1 つだけ収容できるような箱を無限個用意し，横 1 列に並べる．この箱の列に玉を適当に配置しよう．たとえば図 6.1 では 4 個の玉を配置している．なお，箱には図のように整数番号を付けておく．このように，玉の個数と置き場所を指定したものを**状態**と呼ぶことにする．

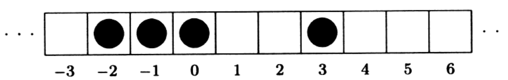


図 6.1　箱の列に入った玉

次に，あるルールに従って玉を移動することを考える．移動により，状態は別の状態に変化することになる．これを時間変化とみなして整数の時刻を考え，任意の時刻 n から次の時刻 $n+1$ への状態変化が起こると考える．このときの移動ルールを以下のように定義する．

- まず，玉を移し替える人がいるとする．以降この人のことを**運搬人**と呼ぼう．運搬人は任意の時刻 n で左の方の箱から順に以下の動作を行う．
- 現在対象としている箱が空の場合，手持ちの玉があればそのうちの 1

つを箱に入れ，手持ちの玉がなければ何もしない．箱に玉がある場合は，その玉を取り出して手に持つ．手に持てる玉の個数に上限はないとする．
- 左から右へすべての箱を一巡したら時刻が 1 増えて $n+1$ になる．

このルールに従うと，図 6.1 の後の時刻の状態は図 6.2 のようになる．

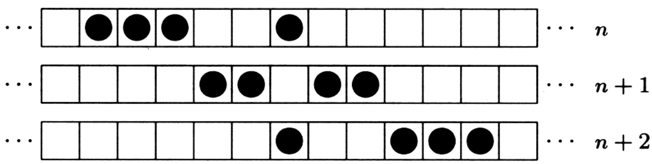


図 6.2　玉の移動

時間を逆方向にもたどれることに注意しよう．時間を逆にたどるには，ルールの左右を逆にすればよく，以下のようになる．

- 運搬人は，任意の時刻 n で右の方の箱から順に以下の動作を行う．
- 現在対象としている箱が空の場合，手持ちの玉があればそのうちの 1 つを箱に入れ，手持ちの玉がなければ何もしない．箱に玉がある場合は，その玉を取り出して手に持つ．手に持てる玉の個数に上限はないとする．
- 右から左へすべての箱を一巡したら時刻が 1 減って $n-1$ になる．

図 6.1 の状態を $n=0$ として，その前後の時刻でしばらく状態の時間変化を追跡すると，図 6.3 が得られる．時間軸は下向きが正である．$n \leq 0$ では ●●● と ● という 2 つの玉のグループがこの順序で存在し，単位時間あたりそれぞれ速さ 3, 1 で右へ移動している．●●● の方が速く移動するので，$n=1$ で ● に追いつき，それまでの玉のグループがこわれる．ところが，$n \geq 2$ で再び同じ玉のグループが現れ，今度は ●●● の方が ● の右に位置しており，速さは前と同じ 3, 1 であるので，両者は二度と出会わない．

ではもっと単純に，k 個の玉がくっついて単独のグループになっている場合はどうであろうか．この場合は図 6.4 のように単にその玉のグループが単位時間あたり速さ k で右に移動するだけである．

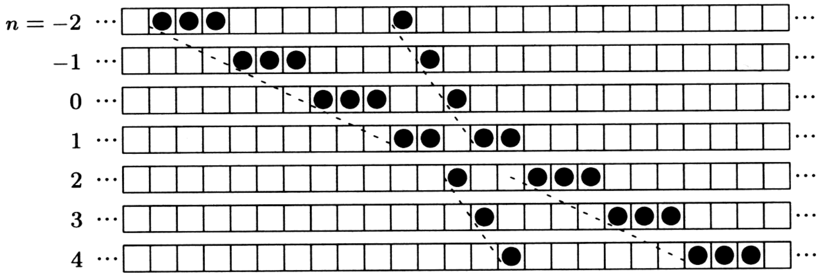


図 6.3 図 6.1 の時間発展

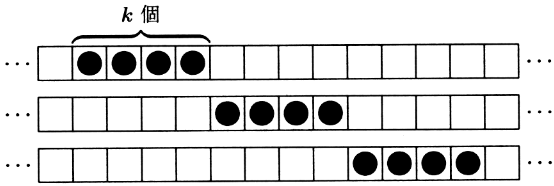


図 6.4 単独の玉のグループの移動

図 6.3 では，$n \leq 0$ あるいは $n \geq 2$ で 2 つの玉のグループが十分離れているため，それぞれが単独に存在しているかのようにふるまっているとみなせる．面白いのは，$n = 1$ で両者が衝突するにもかかわらず，その後も同じ玉のグループが再現することと，図中の点線で示したように衝突前後でグループの軌道がずれることである．

問 6.1 図 6.3 において玉のグループの軌道は相互作用の前後でどれだけずれているか．

さらに，図 6.5 に ●●●●, ●●, ● という 3 つの玉のグループの追い越しの様子を示す．$n = 2, 3$ で ●● が ● を追い越し，$n = 5 \sim 7$ で ●●●● が ●, ●● を同時に追い越している．

今度は図 6.6 に ●●●●, ●●●, ●●, ● という 4 つの玉のグループの追い越しの様子を示す．$n = 3$ で最も左に位置していた ●●●● が $n = 4$ で最も右に突然現れている．

実は，任意の初期状態に対して以下のことを証明できる [54].

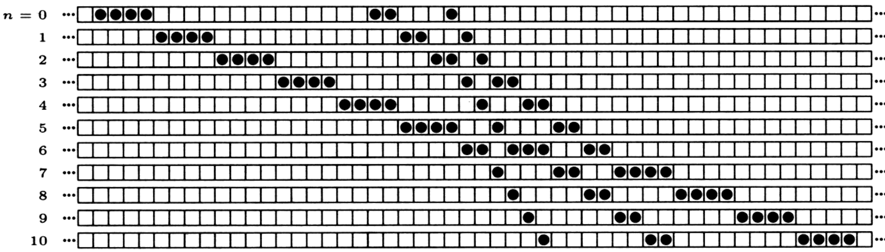


図 **6.5**　3 つの玉のグループの追い越し相互作用

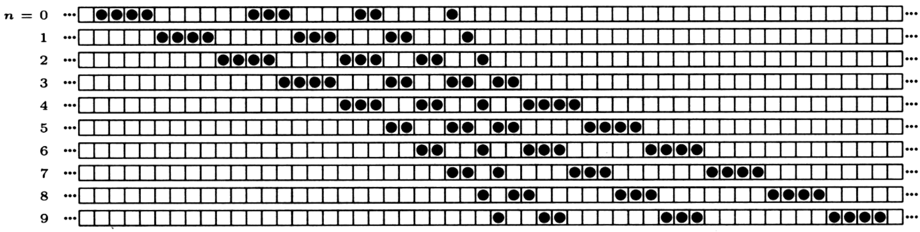


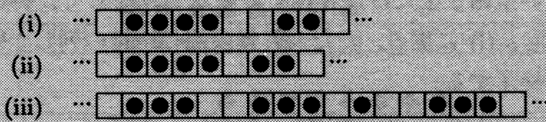
図 **6.6**　4 つの玉のグループの追い越し相互作用

初期時刻に任意の状態が与えられているとする．その時刻から十分時間をさかのぼると，それ以上時間をさかのぼってもお互い衝突しない，いくつかの玉のグループに必ず分かれる．このとき各グループに属する玉の個数を，左の方から順番に $k_1, k_2, \ldots, k_N$ とする（当然 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_N$ である）．さらに，初期時刻から十分時間が経ったとき，それ以後でお互い衝突しない玉のグループに必ず分かれる．そのとき各グループに属する玉の個数は，左の方から順番に $k_N, k_{N-1}, \ldots, k_1$ となる．

非線形波動理論では，相互作用にもかかわらず壊れない波のことを**ソリトン** (soliton) と呼ぶ [41,55]．玉のグループも，単独では一定速度で右へ伝播するのであるから「波」とみなすことができる．ただし，波の構成要素が数えることのできる玉であり，時刻・位置・速度が整数なのでデジタル波とでも言うべきものである．さらに，玉のグループが相互作用にかかわらず壊れないので，それらをソリトンと呼んでもいいであろう．壊れない波の個数が N 個存在するとき，N ソリトンと呼ぶ習わしがある．すなわち図 6.3, 6.5, 6.6

ではそれぞれ 2, 3, 4 ソリトンが存在している．

問 6.2 以下の状態にはそれぞれどのようなソリトンが含まれているか．



6.2 マーキング

箱玉系では $n \ll 0$ で現れるソリトン（玉のグループ）が追い越し相互作用を行うにもかかわらず自己を保存して，$n \gg 0$ で同じソリトンが現れている．しかしながら，相互作用を行っている途中では，一見ソリトンが崩れるように見える．たとえば，図 6.3 では大きさが 3, 1 のソリトンが $n = 1$ で近接した 2 つの 2 個の玉のグループになっており，この時刻でソリトンが見えなくなる．そこで，どのようにソリトンが相互作用し，その後どのように元のソリトンが復活するのか途中経過を詳しく見てみよう．このために**マーキング**と呼ぶ手続きを行う [53].

まず，任意の状態が与えられているとする．状態は連続する空箱の列と連続する玉の列が交互に含まれている．たとえば図 6.3 の $n = 1$ では，図 6.7 に示すように左から順番に，無限個の空箱の列，2 個の玉の列，1 個の空箱の列（1 個でも列と呼ぼう），2 個の玉の列，無限個の空箱の列が存在する．

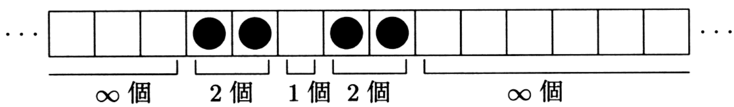


図 6.7 空箱の列と箱の列

次に，これら列の並びに対し以下のマーキングの手続きを行う．

(i) 左の列から順に隣り合う列を比較し，初めて左の列の大きさが右の列の大きさ以下になる部分に着目して (ii) に進む（大きさは列に属する空箱あるいは玉の個数で定義する）．

(ii) 左の列に属するすべての空箱（玉）と，右の列に属するそれと同じ個

数分の玉（空箱）を列の左から選び，それらをすべて同じマークで印をつける．

(iii) 印をつけた空箱と玉の存在を以降の操作で無視し，まだマークのついていない空箱と玉だけが存在しているとみなして，再び列の大きさを数え直し，(i) に戻る．ただし，無限個の空箱の列しか残らなければ手続きを終了する．

以上の手続きを図 6.7 の場合に行うと図 6.8 のようになる．

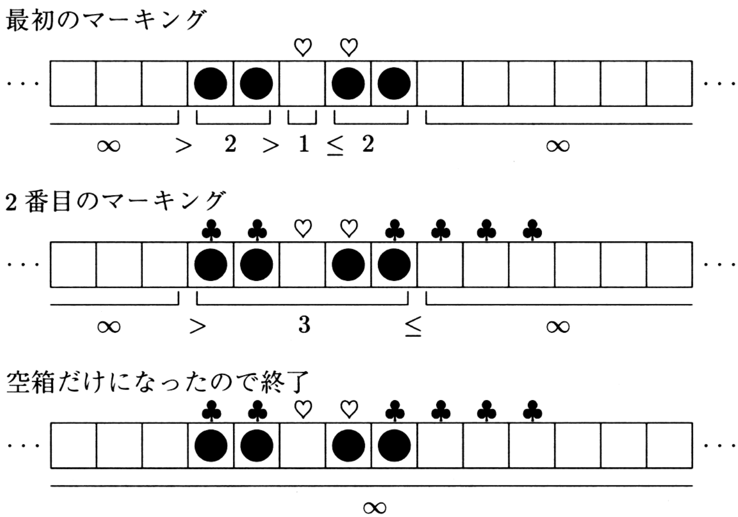


図 6.8　マーキング

このマーキングを図 6.3 の $-1 \leq n \leq 3$ の範囲のすべての状態に対して行ってみよう．結果は図 6.9 のようになる．このマークの動きを見ると，ソリトンがどこでどのようになっているかが相互作用の途中でも一目瞭然である．すなわち，$n=0$ で♣と♡の相互作用が始まり，$n=2$ で相互作用が終わっている．また，$n=0$ の♡は $n=1,2$ で同じ位置にあるが，$n=0$ での♡の玉と空箱が $n=1$ ではそれぞれ空箱と玉になり，$n=1$ と 2 でも同じ逆転現象が起きている．すなわち，♣が♡を飛び越して通り過ぎるまで，♡はその場で 2 回逆転現象を行い，元の状態に戻るのである．

もっと複雑な場合，たとえば図 6.6 の $n=1 \sim 6$ で同じようにマーキング

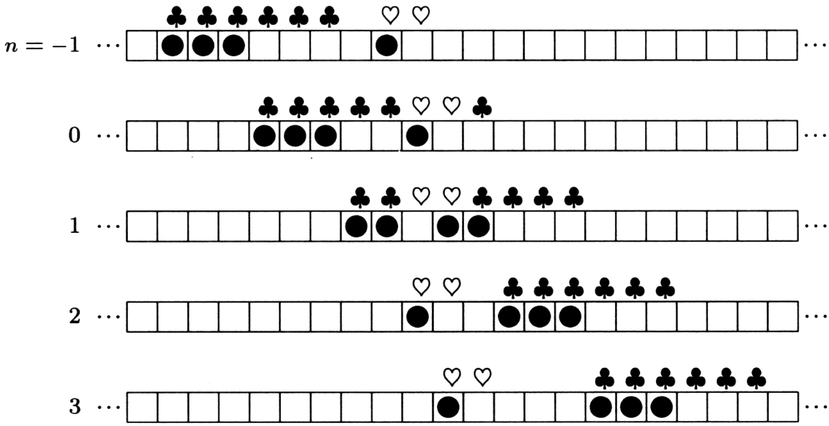


図 6.9 各状態にマーキングを行う

を行った結果を図 6.10 に示す．このマーキングからソリトンの動きがよくわかる．まず，$n=1$ で×のソリトンが☆のソリトンに追いつき，$n=2$ で☆をその場にとどめたまま追い越そうとし，同時に $n=2$ で△のソリトンを追い越し始める．ところが同じ $n=2$ で左から最も大きな○のソリトンが追いついて，$n=3,4$ の 2 つの時刻を経て右に去っていく．$n=3,4$ では○に追い抜かれる×，☆，△はすべてその場でじっとし，1 時刻毎に玉が空箱，空箱が玉に反転する．そして $n=5$ 以降で×が $n=2$ で行っていた☆，△の追い抜きを再開するのである．

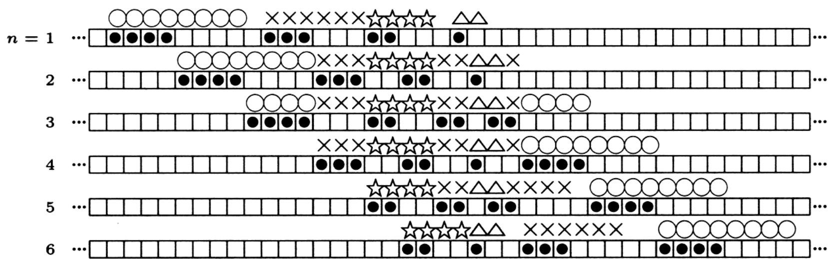


図 6.10 4 ソリトンのマーキング

以上のことを一般化すると箱玉系でのソリトンの動きは以下のようになる．

大きなソリトンがそれより小さな（単数あるいは複数の）ソリトンを追い抜くとき，小さなソリトンをその場に2時刻とどめ，あたかもそれらが邪魔物であるかのように追い越していく．このとき小さなソリトンは，前の時刻の玉と空箱が次の時刻でそれぞれ空箱と玉に反転するので，2時刻経つと大きなソリトンに追い抜かれる前の状態に戻る．

問 6.3 図 6.5 でマーキングを行え．

さらに，上のことから大きなソリトンが小さなソリトンを追い抜く前後の軌道のずれが計算できる．まず，2つのソリトンの追い抜き相互作用を考え，大きなソリトン，小さなソリトンに属する玉の個数をそれぞれ $k_1 > k_2$ とする．すると，追い抜かれる際に小さなソリトンが2時刻の間その場にとどまり，小さなソリトンのマークの個数は $2k_2$ なので，大きなソリトンは追い抜いた後に箱 $2k_2$ 個分だけ右にシフトする．同様に小さなソリトンは追い抜かれた後に箱 $2k_2$ 個分だけ左にシフトする．

問 6.4 上のシフトの法則を図 6.3 で確認せよ．

もっと一般的に，$n \ll 0$ で玉の個数が $k_1, k_2, \ldots, k_N$ $(k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_N)$ の N 個のソリトンがあるとすると，左から l 番目のソリトンは $n \gg 0$ で

$$2\Bigl(\sum_{\substack{1\leq i\leq N\\ k_i<k_l}} k_i - \sum_{\substack{1\leq i\leq N\\ k_i>k_l}} k_l\Bigr)$$

だけ右にシフト（負の値ならその絶対値だけ左にシフト）することになる．

問 6.5 図 6.5, 6.6 で上のシフトの法則を確認せよ．

6.3　箱玉系の保存量

ソリトン系には可算無限個の**保存量**が存在するという一般的性質がある．ここで言う保存量とは，各時刻の状態から計算でき，しかも状態の時間変化によらず常に一定となるような量のことである．箱玉系にもそのような保存量が存在する．たとえば玉の総数は明らかに時間によらず一定である．また，状態に含まれる ●□ というパターンの個数も一定であり，図 6.3, 6.5, 6.6 で ●□ の個数はそれぞれ常に 2, 3, 4 個である．

問 6.6 ●□ の個数が，玉の列の個数および □● の個数に等しいことを示せ．また，その数が時間によらず一定であることを示せ．

さらにもっと統一的に保存量を定義することができ，その定義は前節のマーキングと直接的に関係している [56,57]．まず，任意の状態に対し以下に定義するような玉と空箱の**ペア**を考える．

> 状態中のそれぞれの玉は自分よりも右側に存在する 1 つの空箱とペアを作る．このとき，各ペアは自分の内側に他のペアだけをはさんでいるか，何もはさんでいないかのどちらかである．

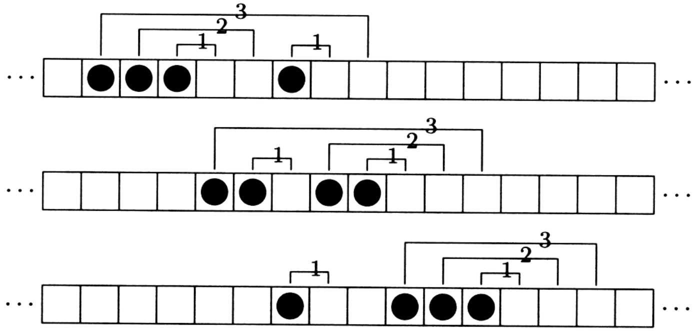
さらに，こうして定まる各ペアに**深さ**を定義する．深さは以下の規則で再帰的に定まる．

(i)　内側に何もはさんでいないペアの深さを 1 とする．

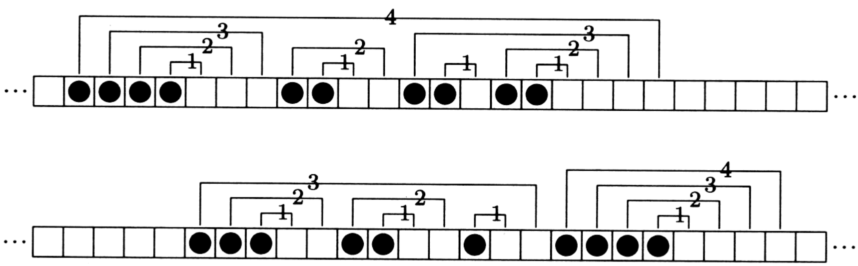
(ii)　深さ k $(k > 1)$ のペアは深さ $k-1$ 以下のペアしかはさまないとする．

図 6.11 (a) に図 6.3 の $n = 0, 1, 2$ のペアを，(b) に図 6.6 の $n = 3, 4$ のときのペアを示す．(a) では深さ 1, 2, 3 のペアがそれぞれ 2, 1, 1 個，(b) では深さ 1, 2, 3, 4 のペアが 4, 3, 2, 1 個存在し，時刻が変わってもその個数は変わらない．また，(a), (b) でそれぞれ深さ 4 以上, 5 以上のペアは存在せず，個数が 0 個でやはり保存する．実は，箱玉系の任意の時間発展において以下の性質が一般に成り立つ．

> 箱玉系では深さ k のペアの個数は時間がたっても変わらない．



(a)



(b)

図 6.11　ペアおよびペアの深さ

すなわち深さ k のペアの個数が保存量であり，k が任意の自然数でこのことが成り立つ．したがって箱玉系には可算無限個の独立な保存量が存在する．

問 6.7 図 6.4（$k=4$ の場合），図 6.5 に含まれるペアを数えよ．

問 6.8 $n \gg 0$ で大きさ（玉の個数）が 1, 2, 4, 7 のソリトンがそれぞれ 2, 1, 3, 2 個存在するとき，ペアの個数はどのようになるか．

問 6.9 $n > m$ のとき，深さ n のペアの個数は深さ m のペアの個数以下であることを示せ．

問 6.10 深さ 6 以上のペアの個数が 0 個で，深さ 5, 4, 3, 2, 1 のペアの個数がそれぞれ，2, 3, 5, 8, 10 のとき，どのような大きさのソリトンが何個存在しているか．

6.4 時間発展則の表現

ここまでは箱玉系の時間発展を玉の移動ルールとして言葉で定義していたが，そのルールを方程式の形で表現することができる．まず，時刻を n，箱の位置を表す番号を j，時刻 n で j 番目の箱に入っている玉の個数を B_j^n としよう．各箱にはせいぜい 1 個の玉が存在するかしないかの 2 通りしかないので，B_j^n は 0 か 1 の値をとる．すると時間発展則は

$$B_j^{n+1} = \min\left(1 - B_j^n,\ \sum_{i=-\infty}^{j-1} (B_i^n - B_i^{n+1})\right) \tag{6.1}$$

と表せる．その理由を以下に示そう．

まず，右辺の min の中の左側の項 $1 - B_j^n$ は，B_j^n が 0 なら 1，1 なら 0 となるので，時刻 n での箱 j の空きスペースを表している．また，min の右側の項は次式のように解釈できる．

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=-\infty}^{j-1} (B_i^n - B_i^{n+1}) \\
&\quad = (\text{時刻 } n \text{ で箱 } j \text{ より左にある玉の総数}) \\
&\qquad\qquad - (\text{時刻 } n+1 \text{ で箱 } j \text{ より左にある玉の総数}) \\
&\quad = \text{運搬人が時刻 } n \text{ で箱 } j \text{ の位置に来たときの手持ちの玉の個数}
\end{aligned}$$

すると (6.1) は次式のように解釈できる．

$$\begin{aligned}
&\text{箱 } j \text{ の次の時刻の玉の個数} \\
&\qquad = \min(\text{現時刻の空きスペース}, \text{手持ちの玉の個数})
\end{aligned}$$

空きスペースが無いか，手持ちの玉が無いときに min の値は 0 になり，空きスペースがあって手持ちの玉があるときに min の値は 1 になる．これは，まさに箱玉系の時間発展のルールそのものである．そして，この時間発展則 (6.1)

をロトカ–ボルテラ方程式の超離散化によって導くことができる．少し長くなるが，次節から6.8節まで順を追ってこのことを説明していこう．

問 6.11 任意の n で $\lim_{j\to\infty} B_j^n = 0$ であるという条件と (6.1) を用いて，玉の総数が時間によらず一定であることを示せ．

問 6.12 B_j^n から B_j^{n-1} を計算するための式を述べよ．

問 6.13 各箱の空きスペースを E_j^n $(= 1 - B_j^n)$ とする．E_j^n に関する時間発展則を式で表せ．

6.5　ロトカ–ボルテラ方程式

ある環境中で1種類の生物がエサを食べ，細胞分裂あるいは生殖などの過程によって増殖する様子を考える．環境が良ければ単位時間あたりの個体数の増え方は，それぞれの時点における個体数に比例すると考えていいであろう．すなわち，時刻 t での個体数を $x(t)$，比例定数を α (> 0) として，次式の単純な増殖モデルを考えることができる．

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x \tag{6.2}$$

初期時刻 $t = 0$ での個体数を x_0 とすると，この方程式の解は $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$ で与えられる．

問 6.14 (6.2) において，初期時刻を $t = t_0$ とし，$x(t_0) = x_0$ とすると解はどうなるか．

次に，ある環境中で2種類の生物がいるとし，片方を生物 X，もう片方を Y と呼ぶことにし，時刻 t でのそれぞれの個体数を $x(t), y(t)$ としよう．また Y は X の天敵であるとする．海中においてたとえるなら X がプランクトンで，Y がそれを食べる魚である．X は増殖を Y によって抑えられ，Y は X がある程度以上いないと増殖できない．このような状況をモデル化したもの

が次式である.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (\beta - y)x \\ \dfrac{dy}{dt} = (x - \alpha)y \end{cases} \tag{6.3}$$

ここで α, β はともに正の定数である. この式によれば, x は $y < \beta$ で増加, $y > \beta$ で減少し, y は $x < \alpha$ で減少, $x > \alpha$ で増加する. また, $y \sim 0$ で x は単純増殖モデル $dx/dt \sim \beta x$ となり, $x \sim 0$ で y は単純死滅モデル $dy/dt \sim -\alpha y$ となる. (6.3) は**ロトカ–ボルテラ方程式** (Lotka-Volterra equation) と呼ばれる [58]. この方程式では,

$$H = \alpha \log x + \beta \log y - x - y \tag{6.4}$$

が時間によらない定数, すなわち保存量となる.

問 6.15 (i) (6.4) が (6.3) の保存量になることを示せ.
(ii) (6.3) の解のうち, x, y がともに時間によらない定数であるものを挙げよ.
(iii) x, y の初期値をともに正の適当な値にとったとき, (6.3) の解がどのような時間変化をするかについておおまかに説明せよ.

次にもっと生物の種類を増やしてみよう. いま, j 番目の生物種 X_j の時刻 t での個体数を $u_j(t)$ とする. そして, X_j は X_{j-1} を食べ, X_{j+1} に食べられるという食物連鎖を考える. このような状況をモデル化したものが次式である [59].

$$\frac{du_j}{dt} = u_j(u_{j-1} - u_{j+1}) \tag{6.5}$$

j の範囲を $0 \le j \le 3$ とし, u_0, u_3 に対して定数の境界条件 $u_0 = \beta, u_3 = \alpha$ を与える. すると, u_1, u_2 に関する方程式は次式のようになる.

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = (\beta - u_2)u_1 \\ \dfrac{du_2}{dt} = (u_1 - \alpha)u_2 \end{cases}$$

$u_1 = x, u_2 = y$ と書き換えると, この方程式は (6.3) と全く同じになる. つまり, (6.5) は特別な場合として (6.3) を含んでいる. 以降では (6.5) もロトカ–ボルテ

ラ方程式と呼ぶことにする．また j の範囲は特に断らない限り $-\infty < j < \infty$ とし，境界条件として $|j| \to \infty$ で $u_j \to 1$ とする．

問 6.16 (6.5) の境界条件を，0 でない定数 c を用いて $u_j \to c$ ($|j| \to \infty$) とする．変数変換 $u'_j = u_j/c$, $t' = ct$ を用いたとき，u'_j に関する微分方程式と境界条件を述べよ．

(6.5) の解を導出するには少し工夫が必要で，3.4 節で説明した**双線形化法**を用いる．まず，生物種の番号 j と時刻 t に依存する変数 $f_j(t)$ を考え，u_j と以下の関係で結ばれているとする．

$$u_j = \frac{f_{j-1}f_{j+2}}{f_j f_{j+1}} \tag{6.6}$$

また，f_j の境界条件を $f_{j+1}/f_j \to c_{\pm\infty}$（$j \to \pm\infty$, $c_{+\infty}$, $c_{-\infty}$ は j, t によらない定数）としよう．これは u_j の境界条件と矛盾しない．この関係を (6.5) に代入すると**双線形微分方程式**

$$f_{j+1}\frac{df_j}{dt} - f_j\frac{df_{j+1}}{dt} = f_{j-1}f_{j+2} - f_j f_{j+1} \tag{6.7}$$

が得られる．

問 6.17 (6.6) と境界条件 $f_{j+1}/f_j \to c_{\pm\infty}$ ($j \to \pm\infty$) を用いて (6.5) から (6.7) を導け．

(6.7) の解は，その導出については省略するが，次の形のものがある．

$$\begin{aligned} f_j(t) &= \sum_{S\subset\{1,2,\ldots,N\}} \exp\Bigl(\sum_{m\in S}\xi_m(j,t) + \sum_{\substack{l,m\in S\\ l<m}} a_{lm}\Bigr), \\ \xi_m(j,t) &= k_m j - \omega_m t + c_m, \quad \omega_m = 2\sinh k_m, \\ a_{lm} &= \log\Bigl(\sinh^2\frac{k_l-k_m}{2}\Big/\sinh^2\frac{k_l+k_m}{2}\Bigr) \end{aligned} \tag{6.8}$$

解の表現が複雑なので式の読み方を説明しよう．まず，(6.8) で自由に決められる定数は，自然数の N と $1 \le m \le N$ の範囲の k_m, c_m である．これらを決めると ω_m, $\xi_m(j,t)$, a_{lm} が (6.8) の 2, 3 行目から決まる．そして 1 行目から $f_j(t)$ が定まる．この 1 行目の右辺の和記号についても説明しよう．まず

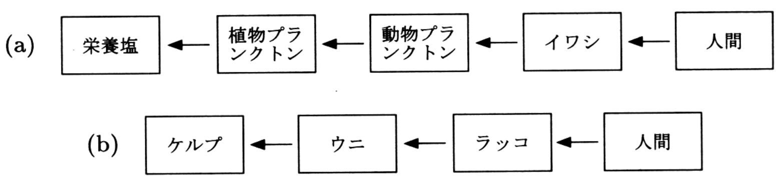
■ 生態系とロトカ–ボルテラ方程式

生態系における変動の伝播が確認された有名な例を菊池泰二著『海底動物の世界』（中央公論社）より 2 つ紹介しよう．

1. イワシの漁獲量の減少：
洪水期におけるナイル川の豊富な水量によって豊かな栄養塩が地中海に供給されている．この栄養塩の増大が植物プランクトンの増殖を惹き起こし，ついで植物プランクトンを喰う動物プランクトンの増殖が起こり，それを喰うイワシの生産，ひいては漁業に依存する人の営みをも支えている．しかし 1960 年代の半ばに完成したアスワン・ハイダムによってナイル川の流量は大幅に減少し，海への栄養塩の供給はとざされ，ダムの完成の前年には 1 万 5,000 トンあったイワシの漁獲量は，翌 1965 年には 4,600 トン，1966 年には 554 トンに激減した．
2. ジャイアント・ケルプの減少：
米国のカリフォルニヤの沿岸浅海にはジャイアント・ケルプと呼ばれる茎の長さが 30m から 40m に達する巨大なコンブ類の 1 種が生えている．現地ではこれを収穫し，その植物体に含まれるヨードその他の物質を抽出して医薬原料とする産業がなりたち，重要な資源の 1 つとなっている．ところが近年ケルプの減産が目立つようになってきた．直接の原因は多数のウニによる食害なのであるが，ウニが増えたのはウニの天敵であるラッコを人間が良質の毛皮目的のために狩り尽くしたからだと分かった．

つまり以下の図 (a), (b) のような喰うものと喰われるものとの系列があって以下の現象が起きた．

(a)　イワシが減ったのはダムの完成によって栄養塩が減少したからである．
(b)　ケルプが減るのは人間がラッコを取り過ぎたからである．



$\sum_{S\subset\{1,2,\ldots,N\}}$ は，1 から N までの整数の集合 $\{1,2,\ldots,N\}$ から任意の部分集合 S を選び，そのそれぞれについて exp を計算して和をとれ，という意味である．ただし，S の候補として空集合も含まれる．さらに，$\sum_{m\in S}$ は部分集合 S の

元である整数 m すべてについて和をとれという意味であり，$\sum_{\substack{\ell,m\in S\\ \ell<m}}$ は $\ell<m$ を満たす S の 2 つの元 ℓ, m の組合せすべてについて和をとれという意味である．なお，S が空集合のとき $\sum_{m\in S}$ の和の値を 0，S が空集合か 1 つしか元がないとき $\sum_{\substack{l,m\in S\\ l<m}}$ の和の値を 0 とする．

問 6.18 次を計算せよ．
(i) $\sum_{S\subset\{1,2,3\}} S$ の元の個数　(ii) $\sum_{S\subset\{1,2,\ldots,N\}} 1$

問 6.19 次を計算せよ．
(i) $S=\{1,2,4\}$ とするとき $\sum_{m\in S} m^2$　(ii) $\sum_{S\subset\{1,2,3\}} \exp\left(\sum_{m\in S} m\right)$

問 6.20 次を計算せよ．
(i) $S=\{1,2,4\}$ とするとき $\sum_{\substack{\ell,m\in S\\ \ell<m}} \ell m$　(ii) $\sum_{S\subset\{1,2,3\}} \exp\left(\sum_{\substack{\ell,m\in S\\ \ell<m}} (m-\ell)\right)$

$N=1, 2, 3$ のときの $f_j(t)$ を以下に順に並べる．

$$f_j = 1+e^{\xi_1},$$

$$f_j = 1+e^{\xi_1}+e^{\xi_2}+e^{\xi_1+\xi_2+a_{12}},$$

$$\begin{aligned}f_j = 1&+e^{\xi_1}+e^{\xi_2}+e^{\xi_3}\\ &+e^{\xi_1+\xi_2+a_{12}}+e^{\xi_1+\xi_3+a_{13}}+e^{\xi_2+\xi_3+a_{23}}+e^{\xi_1+\xi_2+\xi_3+a_{12}+a_{13}+a_{23}}\end{aligned}$$

問 6.21 $N=1, 2$ の場合，上の f_j にさらに (6.8) の ξ_m, $a_{\ell m}$ の定義を代入せよ．

これら f_j から (6.6) を通じて u_j が定まる．$N=1$ の場合の u_j のグラフは図 6.12 のようになる．この図では，時刻 t を適当に固定し，横軸に j をとり，

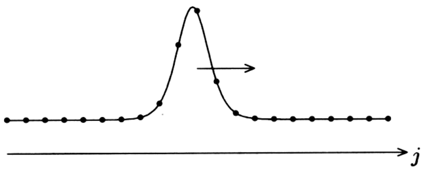


図 6.12　$N=1$ の場合の u_j

j が整数値のところで u_j の値を黒丸でプロットしている．実線は j を連続な実数とみなしたときの u_j のグラフである．グラフは波のような形をしており，時刻とともに右方向へ一定の速度 $\dfrac{\omega_1}{k_1}=\dfrac{2}{k_1}\sinh k_1$ で進む．また，グラフの頂点の高さは $\left(2\cosh\dfrac{k_1}{2}-1\right)^2$ であり，すそ野の高さは境界条件より 1 に収束する．

問 6.22　$N=1,\ k_1=\log 2,\ c_1=0$ とする．
(i) $f_j(t),\ u_j(t)$ を具体的に求めよ．
(ii) $u_j(t)>1,\ \lim_{|j|\to\infty} u_j(t)=1$ を示せ．
(iii) j を連続変数とみなしたとき，任意の t において $u_j(t)$ の最大値とそのときの j の値を求めよ．

$N=3$ のときの u_j のプロットを図 6.13 に示す．$t\ll 0$ では，k_1,k_2,k_3 のそれぞれを図 6.12 の k_1 に相当させて得られる 3 つの波が互いに離れて共存し，左から背の高さの順に並んでいる．ところが背の高い波ほど右への移動速度が速く，$t=0$ 付近で波が合体して相互作用する．ところがさらに $t\gg 0$ では，$t\ll 0$ で現れた 3 つの波が再び順序を逆にして現れ，二度と相互作用せずにお互い離れていく．

図 6.13 では各波が相互作用にかかわらず自己を保存する．見かけは異なるが，この性質は前に登場した箱玉系の玉のグループと共通のものであり，各波がソリトンになっている．つまり，ロトカ–ボルテラ方程式にも (6.8) で表されるソリトン解が存在している．図 6.12 は 1 ソリトン解，図 6.13 は 3 ソリトン解である．

箱玉系とロトカ–ボルテラ方程式のソリトン解は，今の時点ではソリトンとしてのふるまいが似ているというだけの観察しかない．ところが実は，差分

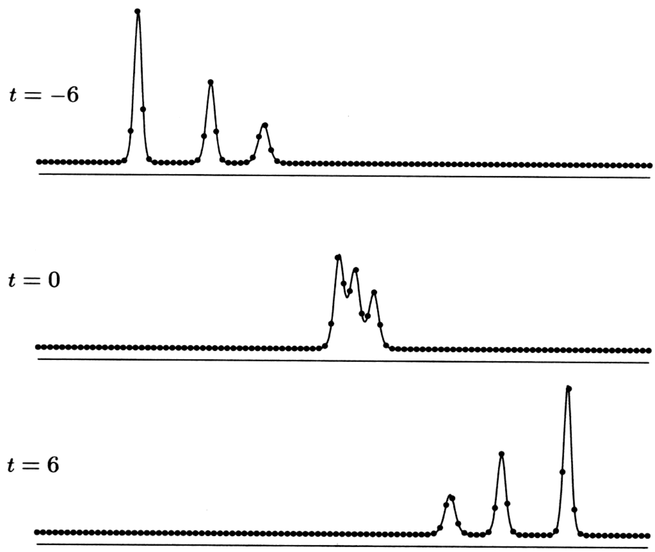


図 6.13　$N = 3$ の場合の u_j ($k_1 = 2$, $k_2 = 2.5$, $k_3 = 3$, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$)

ロトカ–ボルテラ方程式の超離散化を通じて箱玉系とロトカ–ボルテラ方程式が密接かつ厳密に結びついている．このことを以降の 3 つの節で明らかにしていこう．

6.6　差分ロトカ–ボルテラ方程式

ロトカ–ボルテラ方程式は，生物種の番号 j が離散，時間 t が連続の微差分方程式の形をしている．この節では，t を離散化して**差分ロトカ–ボルテラ方程式**を導く．ただし，ソリトン解が存在するという重要な性質を壊さないようにする．このために，u_j に関する方程式 (6.5) を直接差分化せずに，f_j に関する双線形方程式 (6.7) を差分化し，変数変換によって (6.5) の差分化を導く．以下にその概略を説明しよう [6,60].

まず時間差分格子の間隔を δ とし，(6.7) の差分化を次のように定める．

$$\begin{aligned} &f_{j+1}(t)\frac{1}{\delta}(f_j(t+\delta) - f_j(t)) - f_j(t)\frac{1}{\delta}(f_{j+1}(t+\delta) - f_{j+1}(t)) \\ &= f_{j-1}(t)f_{j+2}(t+\delta) - f_j(t+\delta)f_{j+1}(t) \end{aligned} \tag{6.9}$$

■ ロトカ–ボルテラ方程式のソリトン

ロトカ–ボルテラ方程式にソリトンが存在することを最初に示した論文は K.Daikoku, Y.Mizushima, T.Tamama, *Japan J. Appl. Phys.* **14** (1975) 367–376 である．彼らはロトカ–ボルテラ方程式を拡張して

$$\frac{\partial}{\partial t}\log\left(Z^{-1}+V_n\right)=I_{n-1}-I_n,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\log\left(Z+I_n\right)=V_n-V_{n+1}$$

を得た．ここで Z は定数（定常状態における種の数を表すパラメータ）である．この方程式は見方を変えると梯子型非線形回路網を伝播する電圧 V_n と電流 I_n の関係を記述している．

彼らはこの回路方程式にソリトンが存在することを計算機シミュレーションによって発見した．ソリトンとは衝突によって壊れないパルス波のことである．その後，双線形化法によってこの方程式の厳密解（ソリトン解）が発見され，彼らの計算結果が証明された (R.Hirota, J.Satsuma, *J. Phys. Soc. Jpn.* **40** (1976) 891–900).

この式の左辺は (6.7) の左辺の時間微分を前進差分に置き換えただけであるが，右辺は t をうまくずらしている．これは 3.2 節や 3.4 節で述べたゲージ不変性を保つ差分化であり，(6.9) にも N ソリトン解が存在する．さらに $t=n\delta$ の時刻を時間格子として $f_j(n\delta)$ を f_j^n と書くことにし，(6.9) を整理すると次式が得られる．

$$(1+\delta)f_j^{n+1}f_{j+1}^{n}=f_j^{n}f_{j+1}^{n+1}+\delta f_{j-1}^{n}f_{j+2}^{n+1} \tag{6.10}$$

さらに f_j^n から u_j^n への変数変換を

$$u_j^n=\frac{f_{j-1}^{n}f_{j+2}^{n+1}}{f_j^{n}f_{j+1}^{n+1}} \tag{6.11}$$

とすると，(6.10) から差分ロトカ–ボルテラ方程式

$$\frac{u_j^{n+1}}{u_j^n}=\frac{1+\delta u_{j-1}^{n}}{1+\delta u_{j+1}^{n+1}} \tag{6.12}$$

すなわち

$$\frac{1}{\delta}\left(u_j^{n+1}-u_j^n\right)=u_j^nu_{j-1}^n-u_j^{n+1}u_{j+1}^{n+1} \tag{6.13}$$

が得られる．

問 6.23 (6.10) と (6.11) から (6.12) を導け．

(6.13) の N ソリトン解は，次式に示す (6.10) の解 f_j^n から (6.11) を通じて与えられる．

$$f_j^n = \sum_{S\subset\{1,2,\dots,N\}} \exp\Bigl(\sum_{m\in S}\xi_m(j,n) + \sum_{\substack{l,m\in S\\ l<m}} a_{lm}\Bigr),$$

$$\xi_m(j,n) = k_m j - \omega_m n + c_m, \quad \omega_m = \log\frac{1+\delta(1+e^{k_m})}{1+\delta(1+e^{-k_m})}, \tag{6.14}$$

$$a_{lm} = \log\Bigl(\sinh^2\frac{k_l-k_m}{2}\Big/\sinh^2\frac{k_l+k_m}{2}\Bigr)$$

(6.7) の解 (6.8) と上の解との違いは，時間変数が実数の t から整数の n に変わったことと，ω_m の定義が変わったことだけである．

問 6.24 $N=1$ のとき (6.14) の f_j^n が (6.10) を満たしていることを示せ．

6.7　超離散ロトカ–ボルテラ方程式

前節で，ソリトン解を持つという性質を保つようなロトカ–ボルテラ方程式の差分化について述べた．そこで，今度は超離散化を行う [6,27]．(6.12) の u_j^n, δ をそれぞれ

$$u_j^n = e^{U_j^n/\varepsilon}, \qquad \delta = e^{-1/\varepsilon} \tag{6.15}$$

と変換し，(6.12) に代入する．すると，次式が得られる．

$$U_j^{n+1} - U_j^n = \varepsilon\log(1+e^{(U_{j-1}^n-1)/\varepsilon}) - \varepsilon\log(1+e^{(U_{j+1}^{n+1}-1)/\varepsilon})$$

さらに $\varepsilon\to+0$ の極限をとると，**超離散ロトカ–ボルテラ方程式**

$$U_j^{n+1} - U_j^n = \max(0, U_{j-1}^n - 1) - \max(0, U_{j+1}^{n+1} - 1) \tag{6.16}$$

が得られる．

双線形方程式 (6.10) の方も超離散化しておこう．変数変換

$$f_j^n = e^{F_j^n/\varepsilon} \tag{6.17}$$

を用いると

$$F_j^{n+1}+F_{j+1}^{n}+\varepsilon\log(1+e^{-1/\varepsilon})=\varepsilon\log(e^{(F_j^n+F_{j+1}^{n+1})/\varepsilon}+e^{(F_{j-1}^n+F_{j+2}^{n+1}-1)/\varepsilon})$$

が得られ，$\varepsilon\to+0$ の極限で

$$F_j^{n+1}+F_{j+1}^{n}=\max(F_j^n+F_{j+1}^{n+1},\,F_{j-1}^n+F_{j+2}^{n+1}-1) \tag{6.18}$$

が得られる．これが超離散双線形方程式である．また，(6.11), (6.15), (6.17) によって F_j^n から U_j^n への変換式

$$U_j^n=F_{j-1}^n+F_{j+2}^{n+1}-F_j^n-F_{j+1}^{n+1} \tag{6.19}$$

が同時に得られる．(6.18) と (6.19) から (6.16) を導くこともできるので，これら方程式・変換に矛盾は生じていない．

問 6.25　(6.18) と (6.19) から (6.16) を導け．

次に，(6.18) の解を超離散化によって得る．まず，差分方程式の解 (6.14) の各定数を次式のように変換する．

$$k_m=e^{K_m/\varepsilon},\quad \omega_m=e^{\Omega_m/\varepsilon},\quad c_m=e^{C_m/\varepsilon}$$

また，$\xi_m(j,n)=\Xi_m(j,n)/\varepsilon,\ a_{lm}=A_{lm}/\varepsilon$ とする．すると，(6.14) から $\varepsilon\to+0$ の極限で，(6.18) の解が次のように導かれる．

$$\begin{aligned}F_j^n&=\max_{S\subset\{1,2,\ldots,N\}}\Bigl(\sum_{m\in S}\Xi_m(j,n)+\sum_{\substack{l,m\in S\\ l<m}}A_{lm}\Bigr),\\ \Xi_m(j,n)&=K_mj-\Omega_mn+C_m,\\ \Omega_m&=\max(0,K_m-1)-\max(0,-K_m-1),\\ A_{lm}&=|K_l-K_m|-|K_l+K_m|\end{aligned} \tag{6.20}$$

ただし，$\max\limits_{S\subset\{1,2,\ldots,N\}}$ は，$\{1,2,\ldots,N\}$ のすべての部分集合 S に対する最大値を意味する．$N=1,\,2$ の場合に解の具体的な表現を記すと，それぞれ

$$F_j^n=\max(0,\,K_1j-\Omega_1n+C_1),$$

$$\begin{aligned}F_j^n=\max(0,\,&K_1j-\Omega_1n+C_1,\,K_2j-\Omega_2n+C_2,\\ &(K_1+K_2)j-(\Omega_1+\Omega_2)n+C_1+C_2+A_{12})\end{aligned}$$

となる．

この F_j^n を用いて (6.19) によって U_j^n を計算してみよう．たとえば $N=1$ の場合に，$K_1=3, C_1=0$ とすると，$\Omega_1=\max(0,K_1-1)-\max(0,-K_1-1)=2$ となる．よって $F_j^n=\max(0,3j-2n)$ であり，U_j^n は

$$
\begin{aligned}
U_j^n = &\max(0,\ 3j-2n-3)+\max(0,\ 3j-2n+4)\\
&-\max(0,\ 3j-2n)-\max(0,\ 3j-2n+1)
\end{aligned}
\tag{6.21}
$$

となる．この式は $3j-2n$ だけに依存する．したがって，n を固定し j を連続値とみなして U_j^n のグラフを描くと，そのグラフは n とともに右へ 2/3 の速さで動く．そこで $n=0$ での U_j^0 のグラフを調べてみよう．

$$
U_j^0=\max(0,\ 3j-3)+\max(0,\ 3j+4)-\max(0,\ 3j)-\max(0,\ 3j+1) \tag{6.22}
$$

まず，$\max(0,\ 3j)$ のグラフを図 6.14 (a) に示す．$\max(0,3j-3)$ のグラフは $\max(0,3j)$ のグラフを j 軸正方向に 1 だけずらせばよいので，$\max(0,\ 3j)-\max(0,\ 3j-3)$ のグラフは図 6.14 (b) のようになる．$\max(0,\ 3j+4)-\max(0,\ 3j+1)$ のグラフはそれを左に 4/3 だけずらす．したがって U_j^0 のグラフは図 6.14 (c) のようになる．なお，j が整数の格子点での値を黒丸で示している．

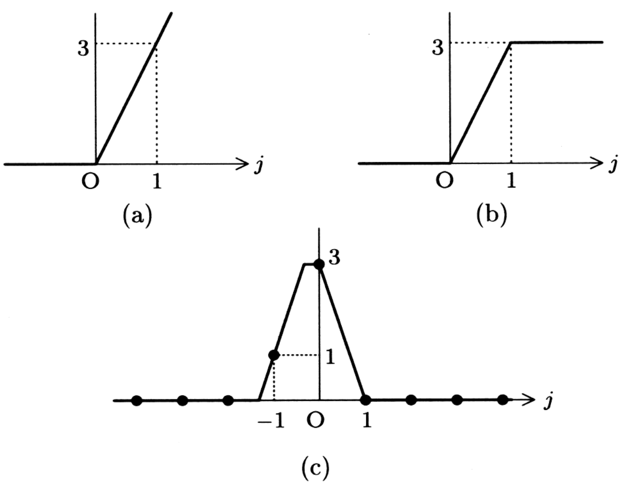


図 **6.14**　(a) $\max(0,3j)$, (b) $\max(0,3j)-\max(3j-3)$, (c) (6.22)

結局，U_j^n は図 6.14 (c) のグラフを n が 1 増える毎に右に 2/3 だけ動かすものになるが，j が整数の格子点での値だけ取り出せばよく，(6.21) から明らかにすべて整数値である．したがって jn 平面の格子点で U_j^n の値を記すと，図 6.15 (a) のようになる．

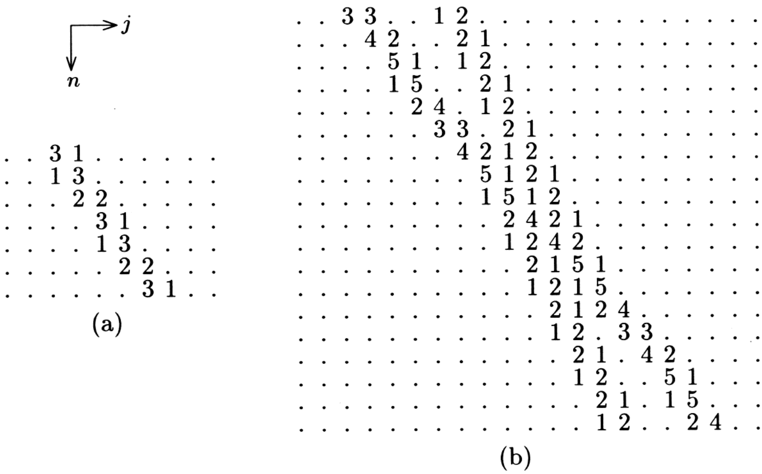


図 6.15　U_j^n のプロット，. は 0 を表す．(a) $N=1$, $K_1=3$, $C_1=0$, (b) $N=2$, $K_1=5$, $K_2=2$, $C_1=C_2=0$

同様にして $N=2$, $K_1=5$, $K_2=2$, $C_1=C_2=0$ の場合の 2 ソリトン解をプロットしたものを図 6.15 (b) に示す．15, 24, 33, 42, 51 というパターンを周期的に繰り返すソリトンと 12, 21 を周期的に繰り返すソリトンとが中央付近でぶつかって合体し，その後再び分裂している．

問 6.26　$N=1$, $K_1=2$, $C_1=1$ のとき，j を連続変数とみなして任意の n に対する U_j^n のグラフを描け．

問 6.27　$N=2$, $K_1=1$, $K_2=2$, $C_1=C_2=0$ のとき，U_j^0, U_j^1, U_j^2 は整数の j に対してどのような値をとるか．

問 6.28 $N=1$ の場合の (6.20) の F_j^n が (6.18) を満たしていることを確かめよ．

6.8　箱玉系と超離散ロトカ–ボルテラ方程式

6.4 節で箱玉系の時間発展則を (6.1) によって与えた．もう一度ここに引用すると，

$$B_j^{n+1} = \min\Bigl(1 - B_j^n,\ \sum_{i=-\infty}^{j-1}(B_i^n - B_i^{n+1})\Bigr) \tag{6.23}$$

である．ただし，B_j^n は時刻 n で j 番目の箱に入っている玉の個数 $(= 0, 1)$ である．この方程式に対し，座標変換と変数変換を施すと，超離散ロトカ–ボルテラ方程式 (6.16) を導くことができる．以下にその関係を示す．

まず第1ステップとして，(6.23) の B_j^n から S_j^n への変数変換

$$S_j^n = \sum_{i=-\infty}^{j} B_i^n \tag{6.24}$$

を考える．$S_j^n - S_{j-1}^n = B_j^n$ を考慮すると (6.23) は

$$\begin{aligned} S_j^{n+1} - S_{j-1}^{n+1} &= \min(1 - S_j^n + S_{j-1}^n,\ S_{j-1}^n - S_{j-1}^{n+1}) \\ &= \min(0,\ 1 - S_j^n + S_{j-1}^{n+1}) + S_{j-1}^n - S_{j-1}^{n+1} \end{aligned}$$

となるので，

$$S_j^{n+1} - S_{j-1}^n = \min(0,\ 1 - S_j^n + S_{j-1}^{n+1})$$

が得られる．この式は任意の j, n で成立するので，添え字 j を1だけずらした式を代わりに用いよう．

$$S_{j+1}^{n+1} - S_j^n = \min(0,\ 1 - S_{j+1}^n + S_j^{n+1}) \tag{6.25}$$

問 6.29 図 6.3 の時間発展に対し，$-2 \le n \le 4$ の範囲での S_j^n の値の分布を調べよ．

第2ステップは，さらに S_j^n から V_j^n への変数変換

$$V_j^n = S_{j+1}^n - S_j^{n+1} \tag{6.26}$$

である．

$$V_{j+1}^{n+1} - V_j^n = (S_{j+2}^{n+1} - S_{j+1}^{n+2}) - (S_{j+1}^n - S_j^{n+1}) = (S_{j+2}^{n+1} - S_{j+1}^n) - (S_{j+1}^{n+2} - S_j^{n+1})$$

より

$$\begin{aligned} V_{j+1}^{n+1} - V_j^n &= \min(0,\, 1 - S_{j+2}^n + S_{j+1}^{n+1}) - \min(0,\, 1 - S_{j+1}^{n+1} + S_j^{n+2}) \\ &= \min(0,\, 1 - V_{j+1}^n) - \min(0,\, 1 - V_j^{n+1}) \\ &= \max(0,\, V_j^{n+1} - 1) - \max(0,\, V_{j+1}^n - 1) \end{aligned} \tag{6.27}$$

が導かれる．これが V_j^n に関する時間発展方程式となる．

問 6.30 問 6.29 で得られた S_j^n の分布から $-2 \leq n \leq 3$ の範囲での V_j^n の値の分布を求めよ．

第 3 のステップとして変換

$$U_{j-n}^j = V_j^n \tag{6.28}$$

を考えよう．この変換の意味は，$j' = j - n,\ n' = j$ という**座標変換**を行い，V_j^n の $j'n'$ 平面における分布を新たに $U_{j'}^{n'}$ と名付ける，ということである．(6.27) を U で書き換えると，

$$U_{j-n}^{j+1} - U_{j-n}^j = \max(0,\, U_{j-n-1}^j - 1) - \max(0,\, U_{j-n+1}^{j+1} - 1)$$

となるので，$j' = j - n,\ n' = j$ とおくと（ただし，いちいち $'$ を付けるのは煩雑なので省略する），

$$U_j^{n+1} - U_j^n = \max(0,\, U_{j-1}^n - 1) - \max(0,\, U_{j+1}^{n+1} - 1)$$

が得られる．この式は前出の超離散ロトカ–ボルテラ方程式 (6.16) に他ならない．

問 6.31 問 6.30 で得られた V_j^n の分布から U_j^n の分布を求めよ．

$$\boxed{\frac{du_j}{dt} = u_j(u_{j-1} - u_{j+1})}$$ **ロトカ–ボルテラ方程式** (6.5)

$\uparrow \quad \delta \to 0$　　（時間連続化）

$$\boxed{\frac{1}{\delta}(u_j^{n+1} - u_j^n) = u_j^n u_{j-1}^n - u_j^{n+1} u_{j+1}^{n+1}}$$ **差分ロトカ–ボルテラ方程式** (6.13)

$\downarrow \quad u_j^n = \exp(U_j^n/\varepsilon), \quad \delta = \exp(-1/\varepsilon), \quad \varepsilon \to +0$　（超離散化）

$$\boxed{U_j^{n+1} - U_j^n = \max(0,\, U_{j-1}^n - 1) - \max(0,\, U_{j+1}^{n+1} - 1)}$$ **超離散ロトカ–ボルテラ方程式** (6.16)

$\uparrow \quad U_{j-n}^j = V_j^n$　　（座標変換）

$$\boxed{V_{j+1}^{n+1} - V_j^n = \max(0,\, V_j^{n+1} - 1) - \max(0,\, V_{j+1}^n - 1)}$$ (6.27)

$\uparrow \quad V_j^n = S_{j+1}^n - S_j^{n+1}$　　（変数変換）

$$\boxed{S_{j+1}^{n+1} - S_j^n = \min(0,\, 1 - S_{j+1}^n + S_j^{n+1})}$$ (6.25)

$\uparrow \quad S_j^n = \sum_{i=-\infty}^{j} B_i^n$　　（変数変換）

$$\boxed{B_j^{n+1} = \min\left(1 - B_j^n,\, \sum_{i=-\infty}^{j-1} (B_i^n - B_i^{n+1})\right)}$$ **箱玉系** (6.1)

図 6.16　ロトカ–ボルテラ方程式から箱玉系までを結びつける図式

以上，ロトカ–ボルテラ方程式から箱玉系までの道筋は非常に長いので，今までに登場してきた方程式の関係を図 6.16 に列挙しておこう．

では，箱玉系のソリトン解の数式による表現はどうなっているであろうか．図 6.16 の関係をたどると，B_j^n と (6.18) の F_j^n の間には以下の関係があることを示せる（章末問題 [6.7]）．

$$B_j^n = F_{j-n+1}^j + F_{j-n-1}^{j-1} - F_{j-n}^{j-1} - F_{j-n}^j \tag{6.29}$$

すると，たとえば (6.20) で $N = 1$, $K_1 = 3$, $C_1 = 0$ の場合，$F_j^n = \max(0, 3j -$

$2n$) なので B_j^n は

$$B_j^n = \max(0, j-3n+3) + \max(0, j-3n-1) \\ - \max(0, j-3n+2) - \max(0, j-3n)$$

となり，j 軸方向に $\cdots 00001110000 \cdots$ と並ぶ数字のパターンが時間とともに速さ 3 で右へ移動する解になる．

問 6.32 1 ソリトン解について任意の正整数 K_1, 整数 C_1 に対する B_j^n を求め，どのようなふるまいを示すか述べよ．

6.9 箱玉系の拡張

ソリトン系であるという性質を壊さずに箱玉系の規則を拡張した系を考えることができる．この節では，これら拡張系のうち簡単なものを 3 種類紹介しよう．

■ 箱の容量を可変にする拡張 [61–63]

元の箱玉系では，すべての箱は玉を 1 つだけ収容できるとしていたが，箱の容量を変えることができる．左から j 番目の箱の容量を L_j（玉 L_j 個分）としよう．L_j は 1 以上の任意の整数で，j によって変わりうるとする．このとき玉を動かす規則を以下のように定める．

- 運搬人は任意の時刻 n で左の方の箱から順に以下の動作を行う．
- 現在対象としている箱に p 個の玉があるとする．このとき，手持ちの玉から箱の空きスペースに入れられるだけ玉を入れる．そして，p 個の玉を取り出して手持ちの玉に加える．
- すべての箱を一巡したら時刻が 1 増えて $n+1$ になる．

任意の j に対して $L_j = 1$ とすれば元の系と同一になるので，この拡張は元の系を特別な場合として含んでいる．

偶数番目と奇数番目の箱の容量をそれぞれ玉 1 個分と 3 個分にした場合の時間発展の例を図 6.17 に示す．

```
 ┌→ j
 ↓
 n
..313.......113......11..........................
.....1312......131....11.........................
........11311.....311...2........................
............2131....212..11......................
................313...113.11.....................
...................1312..12.31...................
......................113.11..313................
.........................12.31...1312............
..........................11..311...11311........
............................2...212.....2131.....
.............................11...113.......313..
```

図 6.17　箱が可変容量の系．偶数番目と奇数番目の箱の容量はそれぞれ玉 1 個分と 3 個分．数字は箱中の玉の個数を表し，. は空箱を表す．

問 6.33　この拡張系の時間を逆にたどるためには，どのような規則で玉を動かせばよいか．

問 6.34　任意の j に対して $L_j = 3$ とする．次の状態の時間発展を調べよ．時間を逆方向にもたどること．
(i) $\cdots 0033200 \cdots$　　(ii) $\cdots 00332300 \cdots$
(iii) $\cdots 001330213300 \cdots$

■ 玉に番号をつける拡張 [63–65]

元の箱玉系では玉同士に区別を設けなかったが，この拡張では玉に整数の番号がついているとする．ただし，複数の玉に同じ番号がついていても構わない．また，箱の容量は玉 1 個分とする．玉を動かす規則は以下の通りである．

- 玉についた番号のうち最も小さいものを M とする．運搬人は任意の時刻 n でまず番号 M の玉に対して左の方の箱から順に次の項目で定められる動作を行う．次に番号 $M+1$ の玉に対して再び左の方の箱から順に同様の動作を行う．以下，対象とする玉の番号を 1 ずつ増やしていって最大番号までこの過程を繰り返す．
- 現在番号 m の玉が対象であるとする．運搬人は左の方の箱から順に巡回し，対象としている箱が空の場合，手持ちに玉があればそのうちの 1 つを箱に入れ，手持ちの玉がなければ何もしない．箱に番号 m の玉がある場合はその玉を取り出して手に持ち，それ以外の番号の玉の場合は何もしない．

- すべての番号の玉に対して上の動作を行ったら，時刻が 1 増えて $n+1$ になる．

玉の番号がすべて同じであるとき，あるいはより一般に，左の方から玉の番号が（広義）単調増加に増えている場合は元の系と等価になるので，この拡張は元の系を特別な場合として含んでいる．

図 6.18 にこの拡張系の時間発展の例を示す．相互作用前に存在した 2234, 114, 3 という玉のグループが相互作用後に 2, 234, 1134 というグループになっている．各グループは所属する玉の個数を変えないという意味でソリトンとしてふるまうが，相互作用前後でグループに所属する玉の番号は入れ替わる．ソリトン同士のこのような玉の交換が系の特徴である．玉の交換を引き起こす直接の原因は，ある時刻から次の時刻への時間発展において，小さい番号の玉が移動して空になった箱に大きい番号の玉が入りうるということにある．

```
  → j
↓
n
..2234......114......3...........................
......2234.....114....3..........................
..........2234....114..3.........................
..............2234...1143........................
..................2234..4113.....................
......................22.344113..................
........................2...2341134..............
.........................2.....234.1134..........
..........................2.......234..1134......
...........................2.........234...1134..
.................................................
```

図 6.18 玉に番号をつけた拡張系．数字は玉の番号を表し，. は空箱を表す．

問 6.35 この拡張系の時間を逆にたどるためには，どのような規則で玉を動かせばよいか．

問 6.36 次の状態の時間発展を調べよ．
(i) $\cdots 00123400 \cdots$ (ii) $\cdots 00142300 \cdots$
(iii) $\cdots 0012403122300 \cdots$

■ 手持ちの玉数を制限する拡張 [66]

元の箱玉系では運搬人が運べる玉の数に上限はなかったが，それに制限を

設け，M 個 ($M > 0$) までの玉しか同時に運べないとする．また，箱の容量は玉 1 個分とする．玉を動かす規則は以下の通りである．

- 運搬人は任意の時刻 n で左の方の箱から順に以下の動作を行う．
- 現在対象としている箱が空の場合，手持ちの玉があればそのうちの 1 つを箱に入れ，手持ちの玉がなければ何もしない．箱に玉がある場合は，その玉を取り出して手に持つ．ただし，現在の手持ちに M 個の玉があるときは何もしない．
- すべての箱を一巡したら時刻が 1 増えて $n+1$ になる．

$M \to \infty$ の極限で元の系と同一になるので，この拡張は元の系を特別な場合として含んでいる．$M = 4$ の場合の系の時間発展の例を図 6.19 に示す．この場合，4 個以上の玉でできたソリトンはすべて右へ 4 の速さでしか動かない．したがって，玉 5 個のソリトンの右側に空箱を 4 つはさんで玉 4 個のソリトンが存在しているが，相互作用前後でそれらの相対位置は変わらない．

```
 ┌→ j
 ↓
 n
..11111....1111.....11.....1.........................
......11111....1111...11....1........................
..........11111....111..111..1.......................
..............11111...11...11.111....................
..................1111..111..1...1111................
......................11..111.111....1111............
........................11...1..11111....1111........
..........................11..1.....11111....1111....
............................11.1........11111....1111
..............................1.11..........11111....
...............................1..11............11111
................................1...11..............1
```

図 6.19　手持ちの玉数の上限を 4 個にした拡張系．1 は玉のある箱を，. は空箱を表す．

問 6.37　この拡張系の時間を逆にたどるためには，どのような規則で玉を動かせばよいか．

問 6.38　$M = 3$ の場合に次の状態の時間発展を調べよ．

(i) $\cdots 00111100 \cdots$　　(ii) $\cdots 0011110100 \cdots$

(iii) $\cdots 001110011101100 \cdots$

■ その他

上記の 3 つの拡張はどれも差分ソリトン方程式の超離散化によって導くことができる．また，上の拡張同士を混合したさらなる拡張系において，ソリトン解が存在するという性質が成り立つ場合もある．たとえば箱を可変容量にして玉に番号をつける，あるいは，玉に番号をつけて手持ちの玉数を制限するというような拡張系が考えられ，それら系の任意の時間発展をソリトン解で記述できることが確認されている．さらに，箱玉系やロトカ–ボルテラ方程式が可積分系全体を包含する数学的枠組みに属していることを利用して，もっといろいろな拡張版を作ることも可能である [67–69].

■ 超離散化と低温極限

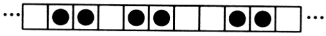
統計力学によれば，熱平衡にある粒子系においてボルツマン定数を k_B，絶対温度を T，系の n 番目のエネルギー固有値を E_n とすると，系の自由エネルギー F が $F = -k_B T \log \sum_n \exp(-E_n/k_B T)$ で与えられる．この状態の**低温極限**を考える，すなわち T を絶対零度に限りなく近づけると，$k_B > 0$ より $\lim_{T\to+0} F = -\max_n(-E_n) = \min_n(E_n)$ が得られ，最低エネルギーの固有状態が実現する．超離散化は，まさにこの低温極限と等価な操作であり，数式を絶対零度の世界に導くのである．

なお，**量子可積分系**の理論では，この操作により**結晶基底** (crystal base) と呼ばれる基底にもとづく代数が得られる．最近では箱玉系と結晶基底との関連も明らかになっている [67–69]. このように超離散化と結晶基底は兄弟とも言える関係にあるが，異なる動機から独立に発見された．また，どちらも同じ時期に初めて報告されており，因縁を感じさせる [53, 70].

章末問題

[6.1]　次の箱玉系の時間発展を調べよ.

(a) 

(b) 

[6.2]　(i) [6.1] (a), (b) の状態に対してマーキングの操作を行い，得られるソリトンが [6.1] の結果と一致することを確かめよ.

(ii) [6.1] (a), (b) の状態に対して保存量を計算せよ.

[6.3]　B_j^0 の値の分布が以下で与えられている．(6.1) に従って B_j^n を $n=5$ まで計算せよ.

(i) $\cdots 0011100011000100 \cdots$

(ii) $\cdots 0011(-1)00 \cdots$

[6.4]　(6.1) で $B_j^n = a_{j-n}$ の形の解を仮定する．このとき a_k $(-\infty < k < \infty)$ が満たすべき条件は何か.

[6.5]　(i) 差分ロトカ−ボルテラ方程式 (6.12) の定数 δ を n に依存する δ_n に置き換えた方程式

$$\frac{u_j^{n+1}}{u_j^n} = \frac{1+\delta_{n+1}u_{j-1}^n}{1+\delta_{n+2}u_{j+1}^{n+1}}$$

を考える．$\delta_n = e^{-L_n/\varepsilon}$, $u_j^n = e^{U_j^n/\varepsilon}$, $\varepsilon \to +0$ として超離散化を行い，U_j^n に関する方程式を記せ.

(ii) 箱の容量を可変にする箱玉系の j 番目の箱の容量を L_j，時刻 n での玉の数を B_j^n とする．この系の時間発展則を B_j^n についての方程式で表せ.

(iii) 6.8 節と同様の手続きにより，(ii) の方程式から (i) の方程式を導け.

[6.6]　(i) (6.20) において $N=2$, $K_1=1$, $K_2=3$, $C_1=C_2=0$ としたときの F_j^n を具体的に記し，(6.29) より B_j^n を求めよ.

(ii) $n \geq 1$ のとき，j を (a) $j \leq n-1$, (b) $j=n$, (c) $n+1 \leq j \leq 3n-1$, (d) $3n \leq j \leq 3n+2$, (e) $3n+3 \leq j$ の場合に分けて B_j^n の値を調べよ.

[6.7]　(i) (6.19) と (6.28) から V_j^n を F_j^n で表せ.

(ii) さらに (6.26) から S_j^n を F_j^n で表せ.

(iii) さらに (6.24) を用いると (6.29) が得られることを確認せよ．

第7章

パターン形成とマックス–プラス方程式

7.1 モデル方程式

U_{ij}^n に関する次の時間発展方程式を考える [71].

$$U_{ij}^{n+1} = \max(U_{ij}^n, U_{i-1j}^n, U_{i+1j}^n, U_{ij-1}^n, U_{ij+1}^n, U_{ij}^{n-1}) - U_{ij}^{n-1} \tag{7.1}$$

i, j は2次元の空間差分格子の座標を表し，n は整数の時刻を表す．差分格子は $-\infty < i < \infty$, $-\infty < j < \infty$ の範囲とする．右辺の max の中の最初の5つの U は，図7.1に示した格子点での時刻 n におけるものである．さらに max の中の最後の項として U_{ij}^{n-1} が入っている．また，右辺の最後の項も U_{ij}^{n-1} である．次の時刻 $n+1$ の U の値を計算するのに，$n-1, n$ での U の値が必要となる．このことから，(7.1) を用いて U の時間発展を計算するには，初期値として連続する2つの時刻での U の空間分布を与えればよい．

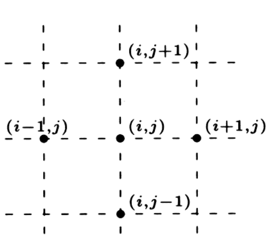


図 7.1 (7.1) の max 中に現れる U の格子点

(7.1) は空間・時間に関して対称性の高い形をしている．たとえば F_{ij}^n が (7.1) の解であるとしよう．すると，当然ながら任意の i, j, n について F_{ij}^n は

$$F_{ij}^{n+1} = \max(F_{ij}^n, F_{i-1j}^n, F_{i+1j}^n, F_{ij-1}^n, F_{ij+1}^n, F_{ij}^{n-1}) - F_{ij}^{n-1} \tag{7.2}$$

を満たしている．この式は任意の i で成り立つので，i のところに $-i$ を代入すると

$$F_{-ij}^{n+1} = \max(F_{-ij}^n, F_{-i-1j}^n, F_{-i+1j}^n, F_{-ij-1}^n, F_{-ij+1}^n, F_{-ij}^{n-1}) - F_{-ij}^{n-1}$$

が得られる．ここで $U_{ij}^n = F_{-ij}^n$ として，この式を U で書き換えると

$$U_{ij}^{n+1} = \max(U_{ij}^n, U_{i+1j}^n, U_{i-1j}^n, U_{ij-1}^n, U_{ij+1}^n, U_{ij}^{n-1}) - U_{ij}^{n-1}$$

が得られる．この式は (7.1) と等価な式である（max の中の U_{i+1j}^n, U_{i-1j}^n が逆順であるが max の性質より入れ替えても構わない）．以上のことより，F_{ij}^n が (7.1) の解なら F_{-ij}^n も解であることになる．

問 7.1 F_{ij}^n が (7.1) の解のとき，$F_{i,-j}^n$, $F_{-i,-j}^n$, F_{ji}^n, $F_{i+i_0,j+j_0}^n$ がそれぞれ解になることを示せ．

問 7.2 任意の i, j に対して U_{ij}^n, U_{ij}^{n+1} が与えられたとき，(7.1) から U_{ij}^{n-1} が一意に定まるか．

(7.1) の解には特別な性質がある．まず (7.1) の max は U_{ij}^{n-1} を含んでいるので U_{ij}^{n-1} 以上の値をとる．これより $U_{ij}^{n+1} \geq 0$ がただちにわかる．また，

$$U_{ij}^{n+1} \leq \max(U_{ij}^n, U_{i-1j}^n, U_{i+1j}^n, U_{ij-1}^n, U_{ij+1}^n) - U_{ij}^{n-1}$$

であり，もし $U_{ij}^{n-1} \geq 0$ ならば

$$U_{ij}^{n+1} \leq \max(U_{ij}^n, U_{i-1j}^n, U_{i+1j}^n, U_{ij-1}^n, U_{ij+1}^n)$$

となる．したがって，適当な正の実数を L とし，2つの初期時刻における U の値が 0 から L の範囲しかとらないとするなら，それ以降の時刻の U の値も

常に0から L の範囲に収まる．さらに初期値を0から L の整数値に限定すると，任意の時刻もそうなる．つまり，初期値に対する制限条件によって (7.1) は空間2次元のセルオートマトンを構成できる．そこで，以下ではこの条件を用いることにし，次節からは特に $L=1$ と設定しよう．すなわち任意の時刻で U は0か1の値しかとらない．

問 7.3 任意の i, j に対して (7.1) の解 U_{ij}^n が $0 \le U_{ij}^n \le L$ を満たしているとする．$V_{ij}^n = L \cdot U_{ij}^n$ とすると，V_{ij}^n はどのような方程式を満たすか．

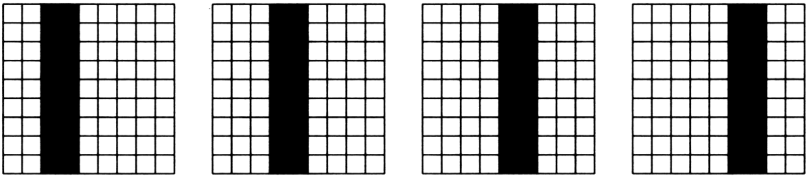
問 7.4 U_{ij}^n の値を常に0か1に限定したとき，AND ($\wedge$), OR ($\vee$), NOT ($\sim$) 演算を用いて (7.1) を書き換えよ．

問 7.5 c_0, c_1 を定数とし，任意の i, j に対して $U_{ij}^0 = c_0$, $U_{ij}^1 = c_1$ とする．
(i) $n \ge 2$ で U_{ij}^n が i, j に依存しない定数になることを示せ．
(ii) (i) での定数を c_n と書くとき，c_n が満たす方程式を記せ．
(iii) c_0, c_1 をそれぞれ0か1とするとき，c_n はどのような値になるか．

7.2 基本的な解

初期値をいろいろ変えて数値計算を行うと，(7.1) にはいくつかの基本的な解が存在することに気がつく．そこで，これら基本的な解の時間発展を以下に図で示そう．なお，初期値を与える時刻は $n=0,1$ とする．また，以下の図では ij 格子平面上の U_{ij}^n の値を各時刻でプロットしており，□が0，■が1の値を表すとする．前節で述べたように，解には平行移動の自由度があるので座標値は特に記していない．

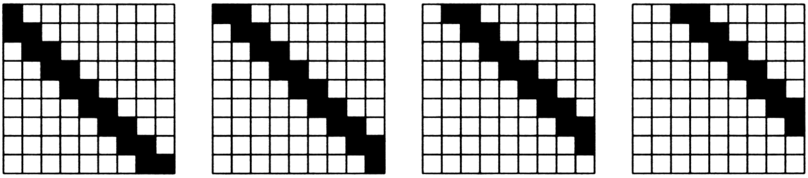
図 7.2 は $n=0$ で縦2列に1を並べそれ以外を0とし，$n=1$ でその1の並びを右に1格子分だけずらした初期値を用いている（この図の外側の領域も図の1の並びが無限の長さで延びているとする）．すると，以降は時刻が1増えるごとに1の並びが右に1格子分だけずれる．すなわち，この解は (7.1) の**進行波**（形を変えずに一定速度で伝播する波）になっている．



$n=0$　$n=1$　$n=2$　$n=3$

図 **7.2**　進行波

45° 傾いた 2 列の 1 の並びをずらしておくとやはり進行波になる．この解を図 7.3 に示す．



$n=0$　$n=1$　$n=2$　$n=3$

図 **7.3**　ななめの進行波

前節の解の性質より，上に示した進行波の図を，i 軸，j 軸あるいは $i=j$ の線に関して鏡映をとったり，i 軸，j 軸方向にずらしたりしても解になっている．

問 7.6　max を用いて図 7.2, 7.3 の解を表せ．（ij 格子平面の原点は適当にとってよい．）

今度は U^0_{ij} をすべて 0 に，U^1_{ij} を 1 点だけ 1 にそれ以外を 0 にしたときの解の様子を図 7.4 に示す．$n=1$ で 1 をおいた所を中心にして正方形が外側に拡がっていく．正方形は多角形であるが，丸い円のアナロジーから**リング**と名づけることにする．

次に U^0_{ij} と U^1_{ij} の同じ 1 点を 1 とし，その他はすべて 0 にしたときの時間発展を図 7.5 に示す．最初に 1 を置いた点は 1, 1, 0, 0 という値を周期的に繰り返す．そしてその周期で図 7.4 と同じリングが繰り返し現れ，一定速度で周辺に拡がっていく．時間が経ったときのパターンは，各リングが丸い形を

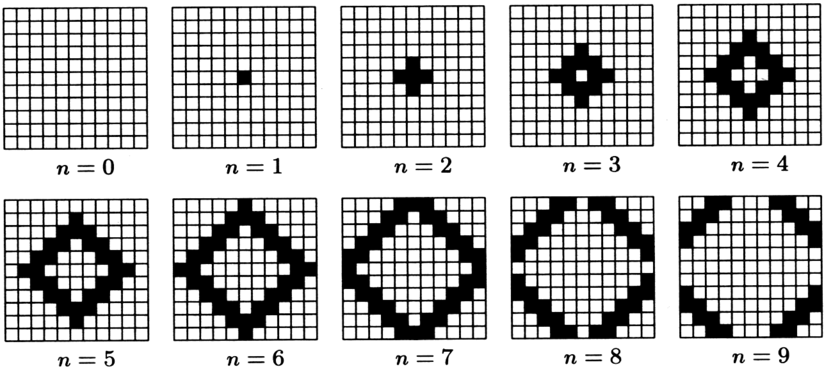


図 7.4　リング

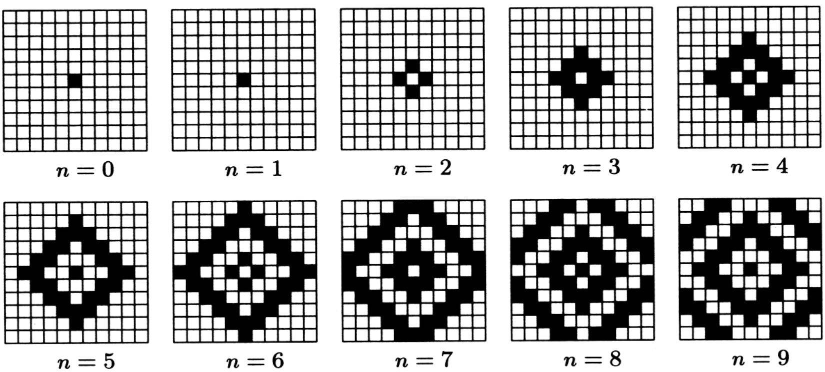


図 7.5　ターゲットパターン

していれば矢の的のように見えるので，これを**ターゲットパターン**と呼ぶことにする．

図 7.2 の無限に延びる 1 の帯を半分にカットした初期値を用いて数値計算をすると，図 7.6 のようになる．ここではきれいなパターンを得るためにカットする形を少し工夫しているが，適当にカットしてもほぼ同じようなパターンが得られる．初期の 2 列の 1 のラインが右に動いていくにつれ，ラインの先端部分を中心として周囲に拡がっていく「渦巻き」が出現する．渦巻きの中心部は時刻が 1 進むごとに反時計回りに 90° 回転している．このパターンを**スパイラルパターン**と名づけよう．

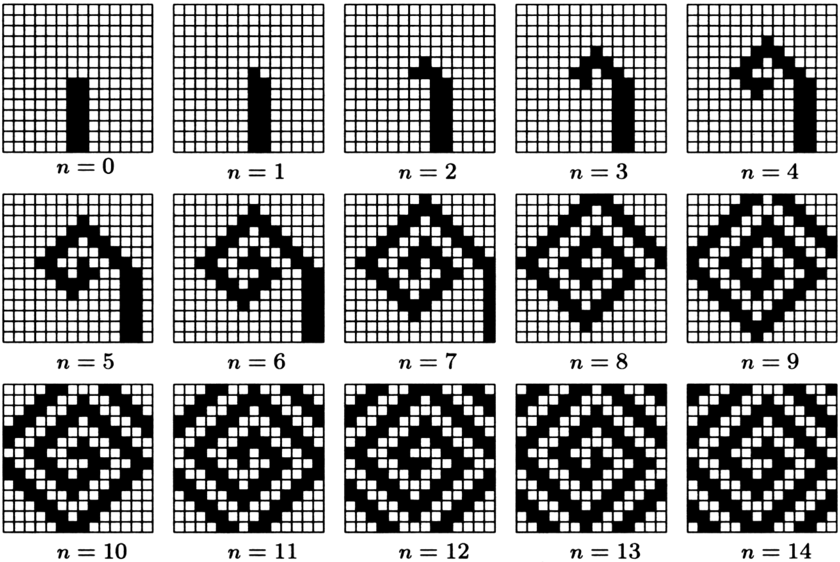


図 7.6　スパイラルパターン

問 7.7　図 7.6 は中心から外へ右に巻くスパイラルパターンである．左巻きのものを得るには，初期値をどのようにすればいいか．

ターゲットやスパイラルは 2 つ以上共存することも可能である．図 7.7 に 2 つのターゲットが共存している様子を示す．たとえば U_{ij}^0, U_{ij}^1 のそれぞれで同じ 2 箇所に 1 をおき，それ以外すべてを 0 にする．この初期値から十分時間が経つとこの図の解が得られる．無限遠までパターンが拡がったときの解は時間に関して周期 4 の周期解になっている．

さらに，図 7.8 に 2 つのスパイラルが共存している様子を示す．この解を得るには，たとえば図 7.2 の 1 のラインの両側をカットして線分状にすれば，線分の両端から逆回りのスパイラルが生まれ，十分時間が経つとこの図にたどりつく．パターンが無限遠まで拡がったときの解は時間に関して周期 4 の周期解になっている．

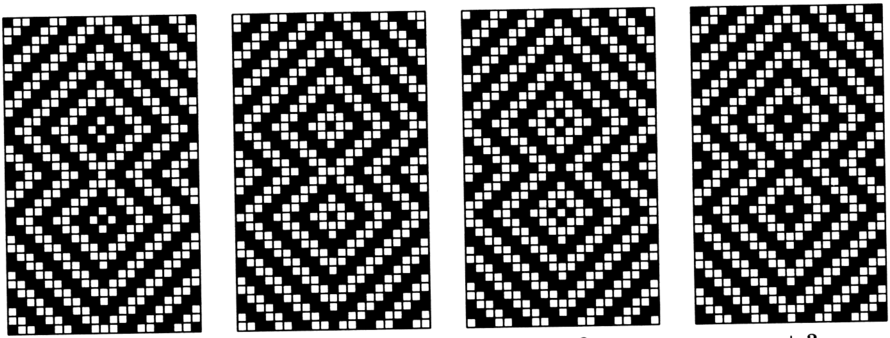


図 **7.7** ダブルターゲットパターン

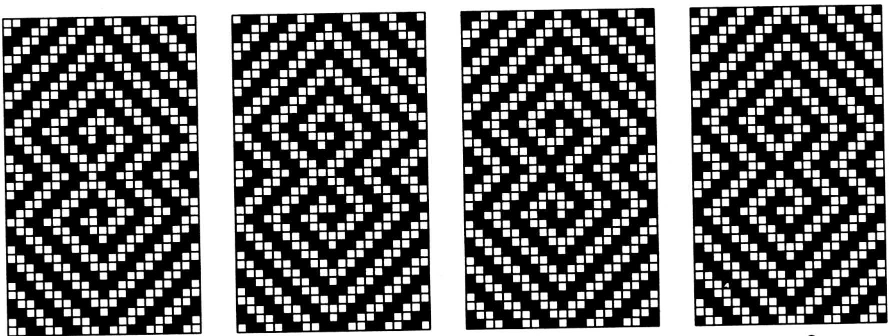


図 **7.8** ダブルスパイラルパターン

7.3 反応拡散系との関連

V_{ij}^n を $V_{ij}^n = U_{ij}^{n-1}$ と定義すると，(7.1) を U と V の連立方程式の形に書き換えることができる．

$$
\begin{cases}
U_{ij}^{n+1} = \max(U_{ij}^n, U_{i-1j}^n, U_{i+1j}^n, U_{ij-1}^n, U_{ij+1}^n, V_{ij}^n) - V_{ij}^n \\
V_{ij}^{n+1} = U_{ij}^n
\end{cases}
\tag{7.3}
$$

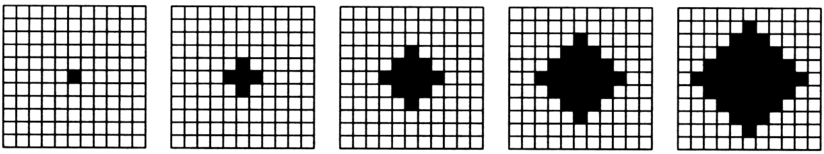
この式は時刻 n での U, V から次の時刻 $n+1$ の U, V が定まる形をしている．なお，前節に引き続き U は 0 か 1 の値しかとらないという前提を用いるので，V も 0 か 1 の値しかとらない．

U_{ij}^n, V_{ij}^n を時刻 n における (i,j) 格子点での生物種 A, B の個体数であると

想定すると，(7.3) は「増殖する A を B が食べる」という生存競争の単純モデルとみなせる（ただし，モデルと言ってもたとえ話のレベルである）．モデルの仕組みを理解するために，まず (7.3) の上の式に注目し，$V_{ij}^n = 0$ を強制的に仮定した次式を考えよう．

$$U_{ij}^{n+1} = \max(U_{ij}^n, U_{i-1j}^n, U_{i+1j}^n, U_{ij-1}^n, U_{ij+1}^n) \tag{7.4}$$

この式について，たとえば ij 格子平面の 1 点だけを 1 にして残りをすべて 0 にする初期値を考える．すると，max の項によってその 1 の値が周囲に増殖していく．図 7.9 にその様子を示す．



$n=0$　　$n=1$　　$n=2$　　$n=3$　　$n=4$

図 7.9　U の増殖

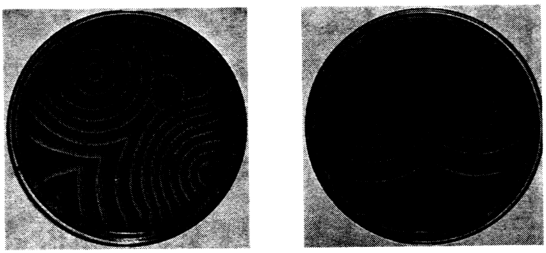
問 7.8 (7.4) について，初期値を以下のようにしたときの時間発展を説明せよ．
(i) 任意の j に対して $U_{0j}^0 = 1$ とし，それ以外を 0 とする．
(ii) $|i|, |j| \le 3$ を満たす格子点のみ $U_{ij}^0 = 1$ とし，それ以外を 0 にする．
(iii) $U_{-2,0}^0 = U_{2,0}^0 = 1$ とし，それ以外を 0 とする．

以上のことから (7.4) は A の増殖を表しているとみなすことができる．そこで元の (7.3) の上の式に戻ろう．まず，ある i, j, n に対して $V_{ij}^n = 0$ のときこの式は (7.4) になる．ところが V_{ij}^n が 1 のときは，max の中の U が 0, 1 のどちらの値をとろうと $U_{ij}^{n+1} = 0$ となる．つまり，生物 B が存在しないとき生物 A は単純増殖し，B が存在するとき A は B によって「食われて」しまうのである．また，(7.3) の下の式は B の増え方を表しており，現在 A が存在している ($U_{ij}^n = 1$) 格子では，次の時刻で B が出現するか存在し続ける．逆に A がいないと ($U_{ij}^n = 0$)，次の時刻で B は存在しない．

生存競争のモデルとして，前の章でロトカ–ボルテラ方程式を取りあげたが，上のモデルとの違いは空間分布を考えていないことである．空間分布を考慮した競合系として有名なものに**反応拡散系** (reaction-diffusion system) があ

る．たとえばその代表例として**ベローソフ–ジャボチンスキー反応**（Belousov-Zhabotinsky reaction, BZ 反応と略す）が挙げられる．これは化学反応における競合系であり，文献 [72–75] などに詳しく紹介されている．

以下に典型的な反応を 1 つ取りあげてその概要を述べよう．まず，水，濃硫酸，臭素酸ナトリウム，マロン酸，臭化ナトリウム，フェロイン溶液をしかるべき順序で混合し，平底のシャーレに注ぐ．すると，酸化還元反応がゆっくりした速度で周期的に起こり，フェロインの酸化・還元に応じてそれぞれ青と赤の色が現れる．ところが，数カ所に人工的な刺激を与えることにより，反応の進み具合を場所によって変えることができる．そして，刺激を与えた点を中心に化学反応波が同心円状あるいはらせん状に周囲に拡がっていき，動く青赤の縞模様として観察されるのである．図 7.10 に同種の実験の写真を示す．(7.1) の基本解で出てくるターゲット，スパイラルという言葉は，反応拡散系での用語を借りたものである．



(a) (b)

図 7.10 BZ 反応 (a) ターゲットパターン, (b) スパイラルパターン（文献 [72] より引用）

この BZ 反応を含めて反応拡散系の物理モデルは，$u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ に関する連立偏微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u,v) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u,v) \end{cases} \tag{7.5}$$

の形で与えられることが多い．ここで x, y は空間座標，t は時間であり，D_u, D_v は u, v の拡散係数，Δ はラプラシアンで $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ と定義される．また，$f(u,v)$, $g(u,v)$ はそれぞれ反応項と呼ばれ u, v の相互作用を表す．これら反応項と $D_u\Delta u$, $D_v\Delta v$ の拡散項が共存しているので反応拡散という用語

が用いられる．詳細は略するが，(7.5) の上下の式はそれぞれ u, v の増え方を規定しており，上の式により「u は増殖して拡がるが，v によって増殖をおさえられる」効果が，下の式により「v は u を消費しながらおおむね u が多い場所の付近に偏在する」効果が表されている．

この節の前半で，(7.3) の意味を生存競争モデルにたとえて説明したが，その仕組みは反応拡散系のものと類似している．実際，(7.3) でターゲット，スパイラルパターンらしきものが存在することを前節で示した．ただし，現在のところ (7.3) はあくまで反応拡散系を非常に粗く模倣した「オモチャ」にすぎず，現実の生存競争や化学反応による具体的な裏付けを持っていない．なお，パターン形成に関してマックス–プラス方程式を意識した研究は過去にないが，セルオートマトンを用いた同様の研究が数多くあり，文献 [76–83] が参考になるであろう．

7.4　基本解の導出 1

7.2 節で (7.1) のいくつかの特徴的な基本解について述べた．もう一度 (7.1) を記しておこう．

$$U_{ij}^{n+1} = \max(U_{ij}^n, U_{i-1j}^n, U_{i+1j}^n, U_{ij-1}^n, U_{ij+1}^n, U_{ij}^{n-1}) - U_{ij}^{n-1} \tag{7.6}$$

この節では，解の幾何的対称性をうまく用いて (7.6) を解き，基本解を導く方法について説明する．

まず，時間について変化がない解があるかどうかを調べる．U_{ij}^n が n によらないので，$F_{ij} = U_{ij}^n$ とおいて構わない．これを (7.6) に代入すると，

$$2F_{ij} = \max(F_{ij}, F_{i-1j}, F_{i+1j}, F_{ij-1}, F_{ij+1}) \tag{7.7}$$

が得られる．U の値は 0 か 1 しかとらない前提をおいているので F もそうであり，$F_{ij} = 1$ とすると，左辺と右辺の値が釣り合わない．したがって任意の i, j について $F_{ij} = 0$ となる．つまり定常解は $U_{ij}^n \equiv 0$ しかないことがわかる．

問 7.9　(7.7) の F_{ij} が実数値をとりうると仮定する．

(i) 任意の i, j に対して $F_{ij} \geq 0$ となることを示せ．

(ii) $F_{ij} = 0$ となるような i, j が存在すると i, j によらず $F_{ij} = 0$ となることを示せ．

(iii) 任意の i, j に対して $F_{ij} > 0$ となるような解の例を示せ．

では，任意の i, j, n に対して $U^n_{ij} = U^n_{ij+1}$ という条件を満たす解をさがしてみよう．この条件は U の値が j によらないことを意味している．図 7.2 のパターンがこれにあたる．この場合は $F^n_i = U^n_{ij}$ とおけるので，それを (7.6) に代入すると，

$$F_i^{n-1} + F_i^{n+1} = \max(F^n_{i-1}, F^n_i, F^n_{i+1}, F^{n-1}_i) \tag{7.8}$$

が得られる．さらに，この解が i 方向か $-i$ 方向に速さ 1 で動く進行波であるとすると，$F^n_i = G_{i\pm n}$ とおける．すると (7.8) より G_k に関する方程式は

$$G_{k-1} + G_{k+1} = \max(G_{k-1}, G_k, G_{k+1}) \tag{7.9}$$

となる．G は 0 か 1 のどちらかの値しかとらないので，ある k に対して上の式を満たす G_{k-1}, G_k, G_{k+1} の組は

$$(G_{k-1}, G_k, G_{k+1}) = (0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,1),\ (1,0,0),\ (1,1,0) \tag{7.10}$$

の 5 つの可能性しかしかない．この数値の組合せが任意の k で成り立つためには，G_k が以下の条件を満たさなければならない．

（G_k の条件）$\cdots G_{-2}G_{-1}G_0G_1G_2\cdots$ というぐあいに G_k の値を順に並べるとする．このとき，(a) $\cdots 000 \cdots$ のようにすべてが 0 である場合，(b) $\cdots 00011000 \cdots$ のように一箇所だけ 11 が存在して他はすべて 0 である場合，(c) $\cdots 0110 \cdots 0110 \cdots 0110 \cdots$ のように複数の 11 が存在し，それらの間に 2 個以上の 0 をはさむ場合，のどれかであれば G_k は (7.9) の解になる．逆にその条件を満たさなければ解にならない． (7.11)

以上のことから，j 方向に同じ値が並び i 方向に ± 1 の速さで進む進行波のパターンは，

$$\begin{array}{c}\cdots 0110 \cdots 0110 \cdots 0110 \cdots \\ \cdots 0110 \cdots 0110 \cdots 0110 \cdots \\ \cdots 0110 \cdots 0110 \cdots 0110 \cdots \\ \cdots 0110 \cdots 0110 \cdots 0110 \cdots\end{array}$$

というように縦 2 列に並んだ 1 の帯が有限個あるいは無限個存在し，もし帯が 2 つ以上存在するなら帯同士がお互い 2 格子分以上離れていなければなら

ない．図 7.2 に示した進行波は，最も簡単な場合であり，帯が 1 つだけである．また，初期値は $n=0$ と $n=1$ の 2 つの時刻で設定するが，$n=0$ で設定した初期値パターンを $n=1$ で i 方向に $+1$ 格子分ずらせば i の正方向に進む進行波が，-1 格子分ずらせば負の方向に進む進行波が得られる．

問 7.10 (i) (7.8)〜(7.10) の導出を確認せよ．
(ii) 任意の k で G_k が (7.10) を満たすとき，(7.11) が成立することを示せ．

問 7.11 (7.8) において初期値 F_i^0, F_i^1 を以下のようにとったとき，その後の時間変化を $n \leq 5$ の範囲で調べよ．

(i) F_i^0 : $\cdots 00100 \cdots$
F_i^1 : $\cdots 00100 \cdots$

(ii) F_i^0 : $\cdots 000000 \cdots$
F_i^1 : $\cdots 001100 \cdots$

7.5　座標曲線

前節で導いた進行波のパターンを ij 格子平面で 90° 回転すれば，j 方向に進む進行波が得られるのは容易にわかる．ところが，図 7.3 のように 1 のラインが斜めになっているようなパターンの場合はどう考えればいいのであろうか．この種の解を導くために，上の議論をさらに一般化して**座標曲線**と呼ぶものを導入する．いま，図 7.11 (a) に示すような，格子点を結んで両端が無限遠方にのびる曲線を考える．曲線が満たすべき条件は以下の通りである．

（曲線の条件）　曲線上の任意の格子点を (k,l) とすると，曲線上でその上隣の格子点が必ず $(k-1,l+1)$, $(k,l+1)$, $(k+1,l+1)$ のどれかになる．

この条件を満たす曲線を 1 本作る．そして図 7.11 (b) のように，その曲線のコピーを並べ，すべての格子点をおおうようにする．さらに，曲線 1 つ 1 つを同定するため整数の番号をつける．図 7.11 (b) の下の方に曲線につけた番号を示しておく．このような曲線のことを座標曲線と呼ぼう．

すると座標曲線は以下の性質を満たしている．

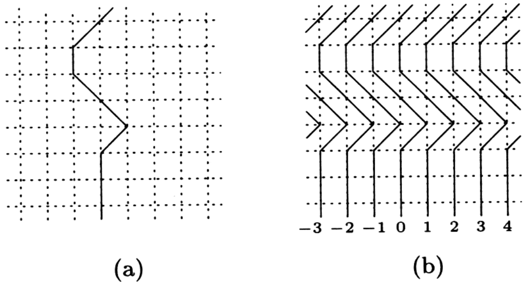


図 7.11 座標曲線 (a) 曲線群のうちの 1 本, (b) 曲線群

> 格子点 (i,j) が m 番の座標曲線上にあるとき，(i,j), $(i\pm 1,j)$, $(i,j\pm 1)$ の合計 5 つの格子点は必ず $m-1$, m, $m+1$ 番の曲線のどれかに存在する．また，$m-1$, m, $m+1$ 番の曲線のどれにもその 5 つの格子点のうち少なくとも 1 つが含まれている．

さて，このような座標曲線群が与えられたときに，(7.6) の U の初期値が以下の条件を満たしているとする．

> $n=0$ で任意の座標曲線を選ぶと，その曲線上ですべての U の値が等しい．$n=1$ でも同様である．なお，同時刻に同じ座標曲線上での値が等しいだけでよいので，番号が異なる座標曲線での値は異なっていて構わず，同じ座標曲線の $n=0,1$ での値が異なっていてもよい．

この条件が満たされている場合に (7.6) による時間発展を考えると，任意の時刻 n で各座標曲線上の U の値が等しくなる．このことを数学的帰納法で示すことができる．まず，ある時刻 N と $N-1$ で U_{ij}^n がこの条件を満たしているとしよう．それら時刻での m 番の曲線の U の値を F_m^N, F_m^{N-1} とする．このとき，格子点 (i,j) が m 番の曲線上にあるとすると，U_{ij}^{N+1} は (7.6) および座標曲線の性質から

$$U_{ij}^{N+1} = \max(F_{m-1}^N, F_m^N, F_{m+1}^N, F_m^{N-1}) - F_m^{N-1}$$

によって計算できる．時刻 $N+1$ で m 番の曲線上の U の値はすべて上式の右辺で計算できるので，$N+1$ での値は同じ座標曲線上で等しくなる（証明

終わり）．

以上のことから，任意の時刻 n での m 番の曲線上の U の値を F_m^n と定義でき，F_m^n は次式にしたがう．

$$F_m^{n+1} = \max(F_{m-1}^n, F_m^n, F_{m+1}^n, F_m^{n-1}) - F_m^{n-1} \tag{7.12}$$

この式は (7.8) の変数 i を m に変更すれば同じ形になる．ということは，$F_m^n = G_{m\pm n}$ という形の進行波解を仮定すると，G_k は (7.9) に従い，(7.11) の条件を満たす 0–1 パターンが解として存在する．

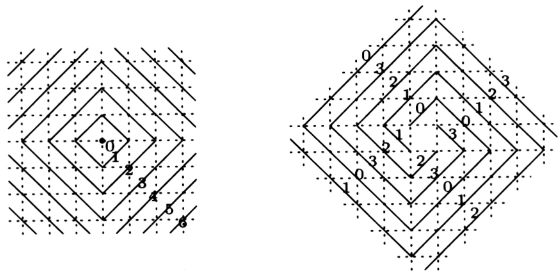
以上のことから，適当な隣り合う座標曲線のみ 1 の値をとり，それ以外はすべて 0 であるような U のパターンが，時間とともに座標曲線の番号が増える方向あるいは減る方向に 1 つずつずれていくような進行波が存在することになる．図 7.3 の進行波もこのタイプの解である．このときの座標曲線は $i+j=$ 整数 によって表される 45° 傾いた直線である．

問 7.12　図 7.11 の座標曲線を利用して，進行波以外の解を 1 つ作れ．

7.6　基本解の導出 2

前節までは，1 の値が無限遠方まで拡がっている場合の進行波解を取り扱った．では，図 7.4, 7.5, 7.6 のような解はどうであろうか．これらの解の導出にも座標曲線が役に立ち，図 7.12 に示すようなターゲット型，スパイラル型のものを用いればよい．どちらの座標曲線にも曲線番号を図中に示している．ターゲット型は中央に 0 番をつけた座標曲線（この場合は点）から始まって，外側に正方形の座標曲線が順に並ぶ．また，スパイラル型座標曲線はある点を中心に渦巻きのように外へ拡がる折れ線であり，全部で 4 本しかない．

どちらの座標曲線も，格子点 (i,j) が m 番の曲線上にあるとすると，その隣接点 $(i\pm 1,j)$, $(i,j\pm 1)$ は $m+1$, $m-1$ 番の曲線上にある．しかも $m+1$, $m-1$ 番の曲線のどちらも隣接点の少なくとも 1 つを含んでいる．ただし，ターゲット型では中央の 0 番の点が特別で，その隣接点は 1 番の上にしか存在しない．また，スパイラル型では 0 番から 3 番までしかなく，番号に関して 4 の法 (mod 4) をとり，3 番の 1 つ大きい番号は 0 番とする．



(a)　(b)

図 7.12　座標曲線 (a) ターゲット型, (b) スパイラル型

さて，初期時刻 $n=0, 1$ において各座標曲線上で U の値が等しいとしよう．すると前節での議論と同様にして，任意の時刻でやはり各曲線上で U の値が等しくなる．ただし，今の場合は番号に関する境界条件が存在するので注意が必要である．m 番の曲線上で時刻 n の U の値を F_m^n とすると，F_m^n に関する方程式は，ターゲット型では

$$\begin{cases} F_m^{n+1} = \max(F_{m-1}^n, F_m^n, F_{m+1}^n, F_m^{n-1}) - F_m^{n-1} \quad (m \geq 1) \\ F_0^{n+1} = \max(F_0^n, F_1^n, F_0^{n-1}) - F_0^{n-1} \end{cases} \tag{7.13}$$

となり，スパイラル型では F の下付添え字について mod 4 をとるとして

$$F_m^{n+1} = \max(F_{m-1}^n, F_m^n, F_{m+1}^n, F_m^{n-1}) - F_m^{n-1} \tag{7.14}$$

となる．両方の式とも (7.8) と同じ形の式が用いられ，(7.8) では $-\infty < m < \infty$ の範囲で考えたのに対し，$0 \leq m$ や mod 4 という条件が加わるので境界条件が必要である．

さて，図 7.4, 7.5 のパターンに対する (7.13) の F_m^n の時空間パターンを調べると次図のようになる．図中の座標曲線の番号は左端から $m = 0, 1, \ldots$ の順である．(a) では $m=0$ から 11 の「波」が 1 つだけ生まれ右方向に速さ 1 で進み，(b) では間に 00 をはさんで周期的に 11 の波が生まれてそれぞれが右方向に速さ 1 で進んでいる．(7.12) では $-\infty < m < \infty$ という領域での速さ 1 の進行波を考えたが，今の場合は $m=0$ という境界で生まれたパターンが $m>0$ で進行波の形で右へ伝播している．

(a)　（→ m，↓ n）

```
. . . . . . . . . . . .
1 . . . . . . . . . . .
1 1 . . . . . . . . . .
. 1 1 . . . . . . . . .
. . 1 1 . . . . . . . .
. . . 1 1 . . . . . . .
. . . . 1 1 . . . . . .
. . . . . 1 1 . . . . .
. . . . . . 1 1 . . . .
. . . . . . . 1 1 . . .
. . . . . . . . 1 1 . .
. . . . . . . . . 1 1 .
```

(b)

```
1 . . . . . . . . . . .
1 . . . . . . . . . . .
. 1 . . . . . . . . . .
. 1 1 . . . . . . . . .
1 . 1 1 . . . . . . . .
1 . . 1 1 . . . . . . .
. 1 . . 1 1 . . . . . .
. 1 1 . . 1 1 . . . . .
1 . 1 1 . . 1 1 . . . .
1 . . 1 1 . . 1 1 . . .
. 1 . . 1 1 . . 1 1 . .
. 1 1 . . 1 1 . . 1 1 .
```

図 7.13　(7.13) の F_m^n のパターン (a) 図 7.4 の場合, (b) 図 7.5 の場合,「.」は 0 を表す.

(7.12) には $\cdots 00011000 \cdots$ や $\cdots 0011001100110000 \cdots$ というパターンが右へ 1 の速さで動く進行波解が存在する．これらの解を mn 平面に書き，うまく $m \leq 0$ の部分を切断すれば図 7.13 (a), (b) が得られる．つまり，(a), (b) で表される解は，$m = 0$ での境界条件と $m > 0$ での進行波解がうまく接続したものである．

問 7.13　図 7.13 の解を (7.13) にあてはめて確認せよ．

問 7.14　(7.13) において F_m^0, F_m^1 を以下のように設定すると，その後どのような 0–1 パターンが出現するか．ただし左端を $m = 0$ とする．

(i)　F_m^0 :　$1000 \cdots$　　F_m^1 :　$0000 \cdots$

(ii)　F_m^0 :　$1000 \cdots$　　F_m^1 :　$0100 \cdots$

次に図 7.6 のスパイラルパターンであるが，この場合は $n \to \infty$ でスパイラルが領域全体に拡がった状況を考える．すると，その形は図 7.12 (b) の座標曲線にうまく適合し，同じ座標曲線上のすべての U は 0 か 1 の等しい値をとり，時刻 n での m 番の曲線の値は $n+1$ での $m+1$ (mod 4) 番の値に等しい．座標曲線が 4 本なので時間に関して周期 4 の周期解になる．つまり，この解を (7.14) で考えると，$m - n$ が法 4 で等しい F_m^n はすべて等しいので

$F_n^m = G_{m-n}$ $(m - n \bmod 4)$ とおけ，$G_0 \sim G_3$ は

$$G_{k-1} + G_{k+1} = \max(G_{k-1}, G_k, G_{k+1}) \tag{7.15}$$

を満たす．ただし G の添え字に関して mod 4 をとる．この条件を満たす $G_k \equiv 0$ 以外の解は (7.10) を考慮すると

$$(G_0, G_1, G_2, G_3) = (0,0,1,1),\ (0,1,1,0),\ (1,1,0,0),\ (1,0,0,1)$$

しかない．つまりスパイラルパターンの空間分布は 90° の回転を同一視すれば一種類しかない．

問 7.15 図 7.6 において $n \to \infty$ で得られるスパイラルパターンは，右巻きのスパイラルが反時計回りに 90° ずつ回転する周期解であるが，同じ右巻きのスパイラルが時計回りに回転する解はあるか．

以上のように，無限遠方に延びる進行波，リング，ターゲット，スパイラルのどれも以下の手続きによって得ることができた．

(i) 格子平面全体をカバーする座標曲線群を準備する．
(ii) 各曲線上で U の値が等しいとする．この対称性を導入することにより，i, j, n の 3 つの独立変数を含む U_{ij}^n の式から，m, n の 2 つの変数のみに依存する F_m^n の式を得る．
(iii) さらに，F_m^n の解に進行波を仮定し，$F_m^n = G_{m\pm n}$ とおく．すると変数 k のみに依存する G_k の方程式を得る．
(iv) どのパターンもこの G_k の方程式の解として記述することができる．

ただし，座標曲線の種類によっては，(ii) ～ (iv) で境界条件を考慮する必要がある．

上記の手続きは，偏微分方程式で対称性の高い解を得るためにしばしば行われるものと類似している．簡単な例を挙げてみよう．波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{7.16}$$

を考える．このとき，y 方向に u の値が一定であると仮定する．すると $u(x,y,t)$

$= v(x,t)$ とおくことができ，上の方程式の y 微分の項が消えるので

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

が得られる．さらに x 方向に一定の速さ c で移動する平面波を仮定し $v(x,t) = w(x-ct)$ とおけば，$w(z)$ に対して

$$(c^2-1)\frac{d^2 w}{dz^2} = 0$$

という常微分方程式が得られる．この式は $c = \pm 1$ なら常に満たされる．したがって $f(z)$ を適当な関数にとり $u(x,y,t) = f(x \pm t)$ とすれば，それは (7.16) の解になる．同様のことがマックス–プラス方程式というデジタル変数の方程式でも可能なのである．

なお，実はダブルターゲット，ダブルスパイラルパターンについても，うまく座標曲線を作ってやれば上と同じ手続きにのせることができる．これについては以下の問で考えてほしい．

問 7.16 図 7.7, 7.8 に示されているダブルターゲット，ダブルスパイラルパターンにあわせて座標曲線を作り，F_m^n に関する方程式を導け．

■ 役に立つ数学とは？

江戸時代の儒者，荻生徂徠 (1666～1728) は当時の数学者を批判して，次のように述べている．

> 「今の数学者達を見ると，いろいろな巧妙な理論を作って精緻さを誇っているが，実際は世の役に立たない.」
> 「古の人の数学書は身近な日常のことだけが書かれているが，それで十分世の中の役に立っている．先賢が六芸の中に数を入れたのもこのためだけであろう.」
> 「ますます巧みでますます凝った書物を書く人ばかり多くなった．彼らは租税のこと築城のこと日暦のことなど何も知らず，風転漢に近いのではないだろうか.」

数学者がこの批判を耳にすると，徂徠の数学にたいする無知に驚いて一笑に付すのは当然と思われる．しかし数学を知らない一般の人は，徂徠の意見に大賛成なのではないかと想像される．

筆者（広田）は学位を取った後，会社の研究所に入って，12 年間実用数学ばかりをやり，その後転向して純粋数学に近い世界に足を踏み入れたのだが，両方の意見が痛いほど理解できる．

現在もっと役に立つ数学をとの要請が強いが,「役に立つ」の意味が難しい．大学卒業後 4, 5 年の間だけ役に立つ数学（実用数学）を教えるのは易しいが，その程度のことで「役に立つ」と言ってよいのかどうか？

和算家（江戸時代の数学者）達が世界数学史上で注目されるほど偉大であるのは，実用数学を研究したからでなく，彼ら自らが「無用の用」と称していた純粋数学を研究していたからである．

章末問題

[7.1]　(i)　(7.1) の初期値として ij 格子平面の一部で

$$\begin{array}{ccccc} * & * & * & * & * \\ * & * & 0 & * & * \\ * & 0 & 1 & 0 & * \\ * & * & 0 & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} * & * & * & * & * \\ * & * & 0 & * & * \\ * & 0 & 1 & 0 & * \\ * & * & 0 & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array}$$

$$n = 0 \qquad\qquad n = 1$$

というパターンを考える．ただし $*$ は 0 か 1 の任意の値を表し，$*$ 同士は同じ値でなくてよい．このとき，この領域における 0–1 パターンの時間変化を調べよ．

(ii)　同様に初期値として以下の場合はどうなるか．

$$\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & * \\ * & 1 & 1 & * \\ * & * & * & * \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & 0 & 1 & * \\ * & 0 & 1 & * \\ * & * & * & * \end{array}$$

$$n = 0 \qquad\qquad n = 1$$

[7.2]　(7.9) の G_k が任意の k で実数値をとりうるとする．

(i)　任意の k で $G_k \geq 0$ となることを示せ．

(ii)　$G_k = 0$ となる k が必ず存在することを示せ．

(iii)　G_k がどのような条件を満たせば解になるか．

(iv)　(7.15) の G_k も実数値をとりうるとすると，どのような解が存在するか．

[7.3]　(7.1) の max の中の項から U_{ij}^{n-1} を除いた次の方程式を考える．

$$U_{ij}^{n+1} = \max(U_{ij}^n, U_{i-1j}^n, U_{i+1j}^n, U_{ij-1}^n, U_{ij+1}^n) - U_{ij}^{n-1} \qquad (ア)$$

(i)　次の初期条件から $n \leq 5$ の範囲でどのようなパターンが現れるかを調べよ．
(a) $U_{00}^1 = 1$ とし，それ以外の U_{ij}^0, U_{ij}^1 をすべて 0 とする．
(b) $U_{00}^0 = U_{00}^1 = 1$ とし，それ以外の U_{ij}^0, U_{ij}^1 をすべて 0 とする．

(ii)　ある n において，任意の i, j に対して U_{ij}^{n-1}, U_{ij}^n が 0, 1 の値しかとらないとする．このとき，U_{ij}^{n+1} も 0 か 1 の値しかとらないためには，U_{ij}^{n-1}, U_{ij}^n がどのような条件を満たしていればよいか．

(iii)　図 7.2〜7.6 に示された (7.1) の解は，(ア) の解でもあることを示せ．

[7.4]　今度は次の方程式を考える．

$$U_{ij}^{n+1} = \max(U_{ij}^n, U_{i-1j}^n, U_{i+1j}^n, U_{ij-1}^n, U_{ij+1}^n) - U_{ij}^{n-1} - U_{ij}^n \qquad (イ)$$

この方程式について，7.4 ～ 7.6 節と同様の解析により，進行波・リング・ターゲット・スパイラルの解を調べよ．ただし，任意の i, j, n に対して U_{ij}^n は 0 か 1 の値しかとらないものに限定する．また，それらは (7.1) の解とどのような点が異なるか．

参考文献

[1] R.Hirota and H.Yahagi, "Recurrence Equations, An Integrable System", *J. Phys. Soc. Jpn.* **71** (2002) 2867–2872.

[2] 広田良吾,『差分方程式講義』, サイエンス社 (2000).

[3] 広田良吾,『差分学入門』, 培風館 (1998).

[4] 石川廣美,『差分方程式入門』, コロナ社 (1976).

[5] M. ケッヒャー（長岡昇勇訳）,『数論的古典解析 歴史を訪ねて』, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1996).

[6] 中村佳正編,『可積分系の応用数理』, 裳華房 (2000).

[7] 金田康正,『π のはなし』, 東京図書 (1991).

[8] R.L.Graham, D.E.Knuth and O.Patashnik, *Concrete Mathemastics*, (Addison-Wesley, 1994).

[9] G.R.W.Quispel, J.A.G.Robert and C.T.Thompson, "Integrable mappings and Soliton Equations II", *Physica D* **34** (1989) 183–192.

[10] R.P.Kurshan and B.Copinath, "Recursively generated periodic sequences", *Can. J. Math.* **26** (1974) 1356–1371.

[11] V.Papageorgiou, B.Grammaticos and A.Ramani, "Integrable lattices and convergence acceleration algorithms", *Phys. Lett. A* **179** (1993) 111–115.

[12] R.Hirota, S.Tsujimoto and T.Imai, "Difference Scheme of Soliton Equations", (*Future Directions of Nonlinear Dynamics in Physical and Biological Systems*, eds. P.L.Christiansen *et al.*, Plenum Press, New York, 1993) 7–16.

[13] A.Bobenko and U.Pinkall, "Discrete Surfaces with constant Negative Gaussian Curvature and the Hirota equation", *J. Diff. Geom.* **43** (1996) 527–611.

[14] F.Morishita, "The fitting of the logistic equation to the rate of increase of population density", *Res. Popul. Ecol.* **VII** (1965) 52–55.

[15] D.Satoh, "A discrete Bass model and its parameter estimation", *J. Oper. Res. Soc. Jpn.* **44** (2001) 1–18.

[16] D.Satoh and S.Yamada, "Parameter estimation of discrete curve models for software reliability assessment", *Jpn. J. Indust. Appl. Math.* **19** (2002) 39–54.

[17] D.Satoh, "A Discrete Gompertz Equation and a Software Reliability Growth Model", *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, **E83-D** (2000) 1508–1513.

[18] R.B.Potts, "Best difference equation approximation to Duffing's equation", *J. Aust. Math. Soc. B* **23** (1982) 349–356.

[19] Y.B.Suris, "Integrable mappings of the standard type", *Funct. Anal. Appl.* **23** (1989) 74–76.

[20] A.I.Bobenko, B.Lorbeer and Yu.B.Suris, "Integrable Discretizatin of the Euler Top", *J. Math. Phys.* **39** (1998) 6668–6683.

[21] R.Hirota and K.Kimura, "Discretization of the Euler top", *J. Phys. Soc. Jpn.* **69** (2000) 627–630.

[22] J.Hietarinta and C.Viallet, "Singularity Confinement and Chaos in Discrete Systems" *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 325–328.

[23] R.Hirota, K.Kimura and H.Yahagi,"How to find the conserved quantities of nonlinear discrete equations" *J. Phys. A* **34** (2001) 10377–10386.

[24] F.Baccelli, G.Cohen, G.J.Olsder and J.P.Quadrat, *Synchronization and Linearization* (New York: Wiley, 1992).

[25] 奥川峻史, 『ペトリネットの基礎』, 共立出版 (1995).

[26] 潮俊光, "ペトリネットと max-plus 代数", 数理科学 **435** (1999) 45–50.

[27] T.Tokihiro, D.Takahashi, J.Matsukidaira and J.Satsuma, "From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through a Limiting Procedure", *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 3247–3250.

[28] 高橋大輔, "ソリトン・セルオートマトン", 数理科学 **405** (1997) 33–39.

[29] "特集 超離散", 数理科学 **435** (1999).

[30] 石田正典, 『すうがくの風景 2 トーリック多様体入門—扇の代数幾何—』, 朝倉書店 (2000).

[31] B.Grammaticos, Y.Ohta, A.Ramani, D.Takahashi and K.M.Tamizhmani, "Cellular Automata and Ultra-Discrete Painleve Equations", *Phys. Lett. A* **226** (1997) 53–58.

[32] D.Takahashi, T.Tokihiro, B.Grammaticos, Y.Ohta, A.Ramani, "Constructing Solutions to the Ultra-Discrete Painleve Equations", *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** (1997) 7953–7966.

[33] A.Ramani, D.Takahashi, B.Grammaticos and Y.Ohta, "The ultimate discretisation of the Painleve equations", *Physica D* **114** (1998) 185–196.

[34] S. Wolfram, *Cellular Automata and Complexity* (Addison-Wesley, 1994).

[35] S. Wolfram, *A New Kind of Science* (Wolfram Media Inc., 2002).

[36] 一松信・竹之内脩編, 『改訂増補 新数学事典』, 大阪書籍 (1991).

[37] M.Noumi and Y.Yamada, "Tropical Robinson-Schensted-Knuth correspondence and birational Weyl group actions", math-ph/0203030 (2002).

[38] 高橋大輔, "超離散的からくり", 数理科学 **435** (1999) 12–17.

[39] A.Nobe, J.Satsuma and T.Tokihiro, "Stable Difference Equations Associated with Elementary Cellular Automata", *Jpn. J. Indust. Appl. Math.* **18** (2001) 293–305.

[40] A.Nobe, J.Satsuma and T.Tokihiro, "From cellular automaton to difference equation: a general transformation method which preserves time evolution patterns", *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001) L371–L379.

[41] アブロビッツ・シーガー（薩摩順吉・及川正行訳）, 『ソリトンと逆散乱変換』, 日本評論社 (1991).

[42] 巽友正, 『流体力学』, 培風館 (1982).

[43] R.Hirota, "Nonlinear Partial Difference Equations Reducible to Linear Equations", *J. Phys. Soc. Jpn.* **46** (1979) 312–332.

[44] K.Nishinari and D.Takahashi, "Analytical properties of ultradiscrete Burgers equation and rule-184 cellular automaton", *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998) 5439–5450.

[45] S.Yukawa, M.Kikuchi and S.Tadaki, "Dynamical Phase Transition in One Dimensional Traffic Flow Model with Blockage", *J. Phys. Soc. Jpn.* **63** (1994) 3609–3618.

[46] M.Fukui and Y.Ishibashi, "Traffic Flow in 1D Cellular Automaton Model Including Cars Moving with High Speed", *J. Phys. Soc. Jpn.* **65** (1996) 1868–1870.

[47] K.Nishinari and D.Takahashi, "A new deterministic CA model for traffic flow with multiple states", *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999) 93–104.

[48] K.Nishinari and D.Takahashi, "Multi-value cellular automaton models and metastable states in a congested phase", *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** (2000) 7709–7720.

[49] M.Fukui, K.Nishinari, D.Takahashi and Y.Ishibashi, "Metastable flows in a two-lane traffic model equivalent to extended Burgers cellular automaton", *Physica A* **303** (2002) 226–238.

[50] 橋詰真美・志田篤彦・高橋大輔, "信号機付き Burgers Cellular Automaton", 九大応力研研究集会報告 **13ME-S4** (2002) 6–11.

[51] 日本学士院日本科学史刊行会編, 『明治前日本数学史 新訂版』, 野間科学医学研究資料館 (1979).

[52] A.Schadschneider and M.Schreckenberg, "Cellular automaton models and traffic flow", *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** (1993) L679–L683.

[53] D.Takahashi and J.Satsuma, "A Soliton Cellular Automaton", *J. Phys. Soc. Jpn.* **59** (1990) 3514–3519.

[54] T.Tokihiro, A.Nagai and J.Satsuma, "Proof of solitonical nature of box and ball system by Means of Inverse Ultra-discretization", *Inverse Problems* **15** (1999) 1639–1662.

[55] 広田良吾, 『直接法によるソリトンの数理』, 岩波書店 (1992).

[56] M.Torii, D.Takahashi and J.Satsuma, "Combinatorial Representation of Invariants of a Soliton Cellular Automaton", *Physica D* **92** (1996) 209–220.

[57] A.Nagai, T.Tokihiro and J.Satsuma, "Conserved quantities of box ball system", *Glasgow Math. J.* **43A** (2001) 91–97.

[58] 寺本英, 『数理生態学』, 朝倉書店 (1997).

[59] O.I.Bogoyavlenskii, "Algebraic constructions of integrable dynamical systems—extensions of the Volterra system", *Russ. Math. Surveys* **46:3** (1991) 1–64.

[60] R.Hirota and S.Tsujimoto, "Conserved Quantities of a Class of Nonlinear Difference-Difference Equations", *J. Phys. Soc. Jpn.* **64** (1995) 3125–3127.

[61] 高橋大輔・薩摩順吉, "単純なソリトン系をなすセル・オートマトンについて", 日本応用数理学会論文誌 **1** (1991) 41–60.

[62] D.Takahashi, "On a Fully Discrete Soliton System", (*Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems*, eds. M.Boiti, L.Martina and F.Pempinelli, World Scientific, 1992) 245–249.

[63] T.Tokihiro, D.Takahashi and J.Matsukidaira, "Box and ball system as a realization of ultradiscrete nonautonomous KP equation", *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** (2000) 607–619.

[64] D.Takahashi, "On Some Soliton Systems Defined by Using Boxes and Balls", (*1993 International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications* 報告集) 555–558.

[65] 高橋大輔, "箱と球でもソリトン系！", 日本物理学会誌 **48** (1993) 37–40.

[66] D.Takahashi and J.Matsukidaira, "Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation", *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** (1997) L733–L739.

[67] 国場敦夫, "ソリトンセルオートマトンとクリスタル理論", 九州大学応用力学研究所研究集会報告集 **11ME–S4** (2000) 96–102.

[68] G. Hatayama, A. Kuniba and T. Takagi, "Simple Algorithm for Factorized Dynamics of g_n-Automaton", *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001) 10697–10705.

[69] G. Hatayama, K. Hikami, R. Inoue, A. Kuniba, T. Takagi and T.Tokihiro, "The $A_M^{(1)}$ automata related to crystals of symmetric tensors", *J. Math. Phys.* **42** (2001) 274–308.

[70] 柏原正樹, "量子群の結晶化" 数学 **44** (1992) 330–342.

[71] D.Takahashi, A.Shida and M.Usami, "On the pattern formation mechanism of (2 + 1)D max-plus models", *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001) 10715–10726.

[72] A.T. ウィンフリー, "渦巻く化学反応", サイエンス 1974 年 8 月号 (1974) 80–94.

[73] 三池秀敏・森義仁・山口智彦, 『非平衡系の科学 III 反応・拡散系のダイナミクス』, 講談社サイエンティフィク (1998).

[74] 太田隆夫, 『非平衡系の物理学』, 裳華房 (2000).

[75] 西浦廉政, 『岩波講座現代数学の展開 非線形問題 1 パターン形成の数理』, 岩波書店 (1999).

[76] G.K.Moe, W.C.Rheinboldt and J.A.Abildskov, "A computer model of fibrillation" *Am. Heart J.* **67** (1964) 200–220.

[77] J.M.Greenberg and S.P.Hastings, "Spatial patterns for discrete models of diffusion in excitable media", *Siam J. Appl. Math.* **34** (1978) 515–523.

[78] J.M.Greenberg, B.D.Hassard and S.P.Hastings, "Pattern formation and periodic structures in systems modeled by reaction-diffusion equations" *Bull. Am. Math. Soc.* **84** (1978) 1296–1326.

[79] J.Greenberg, C.Greene and S.Hastings, "A combinatorial problem arising in the study of reaction-diffusion equations", *Siam J. Alg. Disc. Meth.* **1** (1978) 34–42.

[80] H.Hartman and P.Tamayo, "Reversible cellular automata and chemical turbulence" *Physica D* **45** (1990) 293–306.

[81] M.Gerhardt and H.Schuster, "A cellular automaton describing the formation of spatially ordered structures in chemical systems" *Physica D* **36** (1989) 209–221.

[82] M.Gerhardt, H.Schuster and J.J.Tyson, "A cellular automaton model of excitable media : II. Curvature, dispersion, rotating waves and meandering" *Physica D* **46** (1990) 392–415.

[83] M.Gerhardt, H.Schuster and J.J.Tyson, "A cellular automaton model of excitable media : III. Fitting the Belousov-Zhabotinskii reaction" *Physica D* **46** (1990) 416–426.

付録 A

問の答

第 1 章

問 1.1 (i) $x_{n+1} = a(n+1) + b = x_n + a$ (ii) $x_{n+1} = ap^{n+1} = px_n$

(iii) $x_{n+1} = 2^{n+1} - 1 = 2(x_n + 1) - 1 = 2x_n + 1$

(iv) $x_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{\frac{1}{x_n} + 1} = \dfrac{x_n}{x_n + 1}$

(v) $x_{n+1} = ap^{n+1} + b = p(x_n - b) + b = px_n + b(1-p)$

問 1.2 (i) タイプ I である.

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = 0 + n(n-1) + n = n^2$$

解をチェックする.

$$\text{方程式の左辺} = (n+1)^2,$$
$$\text{右辺} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

そして初期値は $x_0 = 0$. ゆえに解は方程式と初期値を満たしている.

(ii) タイプ I である.

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} + a_k - a_k - a_{k-1}) = a_n + a_{n-1}$$

解をチェックする.

$$\text{方程式の左辺} = a_{n+1} + a_n,$$
$$\text{右辺} = a_n + a_{n-1} + a_{n+1} - a_{n-1} = a_{n+1} + a_n,$$

そして初期値は $x_0 = a_0 + a_{-1} = 0$. ゆえに解は方程式と初期値を満たしている.
(iii) タイプ II である.

$$
\begin{aligned}
x_n &= x_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+2)^2}{k+1} \\
&= \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdots (n+1)^2}{1 \cdot 2 \cdots n} = 1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1)^2 = (n+1) \cdot (n+1)!
\end{aligned}
$$

解をチェックする.

$$
\begin{aligned}
\text{方程式の左辺} &= (n+1)(n+2) \cdot (n+2)! = (n+1)(n+2)^2 \cdot (n+1)!, \\
\text{右辺} &= (n+2)^2(n+1) \cdot (n+1)!,
\end{aligned}
$$

そして初期値は $x_0 = 1 \cdot 1! = 1$. ゆえに解は方程式と初期値を満たしている.
(iv) $x_n = 1/y_n$ と変換すると

$$
\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{\frac{1}{y_n}}{\frac{1}{y_n} + 1}, \qquad \text{または} \quad y_{n+1} = y_n + 1, \qquad y_0 = 1
$$

となる. これはタイプ I である. この式の解は $y_n = n+1$ である. 逆変換により $x_n = \dfrac{1}{n+1}$ が方程式の解である.

解をチェックする.

$$
\begin{aligned}
\text{方程式の左辺} &= \frac{1}{n+2}, \\
\text{右辺} &= \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1} + 1} = \frac{1}{n+2},
\end{aligned}
$$

そして初期値は $x_0 = 1$. ゆえに解は方程式と初期値を満たしている.
(v) $y_n = (n+1)x_n$ と変換すると

$$
y_{n+1} = y_n + 2n - 1, \qquad y_0 = 1
$$

となる. これはタイプ I である. この式の解は $y_n = (n-1)^2$ である. 逆変換により $x_n = \dfrac{(n-1)^2}{n+1}$ が方程式の解である.

解をチェックする.

$$
\begin{aligned}
\text{方程式の左辺} &= n^2, \\
\text{右辺} &= (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2,
\end{aligned}
$$

そして初期値は $x_0 = 1$. ゆえに解は方程式と初期値を満たしている.
(vi) 両辺を $x_{n+1}x_n$ で割り, $y_n = 1/x_n$ と変換すると

$$
y_{n+1} - y_n = n + 2, \qquad y_0 = 1
$$

となる．これはタイプIである．この式の解は $y_n = \dfrac{1}{2}(n+2)(n+1)$ である．逆変換により $x_n = \dfrac{2}{(n+2)(n+1)}$ が方程式の解である．

解をチェックする．

$$方程式の左辺 = 2\Big(\frac{1}{(n+2)(n+1)} - \frac{1}{(n+3)(n+2)}\Big) = \frac{4}{(n+3)(n+2)(n+1)},$$

$$右辺 = (n+2)\frac{2}{(n+3)(n+2)}\frac{2}{(n+2)(n+1)} = \frac{4}{(n+3)(n+2)(n+1)},$$

そして初期値は $x_0 = 1$．ゆえに解は方程式と初期値を満たしている．

(vii) 両辺を $(n+1)(n+2)$ で割り，$y_n = \dfrac{x_n}{n+1}$ と変換すると

$$y_{n+1} - y_n = 2\Big(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\Big), \qquad y_0 = 1$$

となる．これはタイプIである．この式の解は $y_n = \dfrac{2}{n+1} - 1$ である．逆変換により $x_n = 1 - n$ が方程式の解である．

解をチェックする．方程式は

$$(n+1)(1-n-1) - (n+2)(1-n) + 2 = 0,$$

そして初期値は $x_0 = 1$．ゆえに解は方程式と初期値を満たしている．

問 1.3 定数変化法を使う．同次方程式の解より

$$x_n = c_n 2^n, \qquad x_0 = c_0 = 3$$

を与式に代入すると c_n に対する方程式

$$c_{n+1}2^{n+1} = 2c_n 2^n + 2\cdot 3^n$$

または

$$c_{n+1} = c_n + \Big(\frac{3}{2}\Big)^n$$

が得られる．解 c_n は

$$c_n = c_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{3}{2}\Big)^k = 3 + (-2)\Big(1 - \Big(\frac{3}{2}\Big)^n\Big) = 1 + 2\Big(\frac{3}{2}\Big)^n$$

となる．x_n は

$$x_n = \Big(1 + 2\Big(\frac{3}{2}\Big)^n\Big)2^n = 2^n + 2\cdot 3^n$$

で与えられる．

解をチェックする．

$$左辺 = 2^{n+1} + 2\cdot 3^{n+1} - 2(2^n + 2\cdot 3^n) = 2\cdot 3^n = 右辺,$$

そして初期値は $x_0 = 1 + 2 = 3$．ゆえに解は方程式と初期値を満たしている．

問 1.4 定数変化法を使う．同次方程式

$$\hat{x}_{n+1}-(n+1)\hat{x}_n=0$$

の解 $\hat{x}_n=c\cdot n!$ より，

$$x_n=c_n\cdot n!, \qquad x_0=c_0=1$$

を与式に代入すると c_n に対する方程式

$$c_{n+1}(n+1)!-(n+1)c_n n!=(n+2)!$$

または

$$c_{n+1}-c_n=n+2$$

が得られる．この式を解くと

$$c_n=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

となる．したがって

$$x_n=\frac{1}{2}(n+2)!$$

が解である．

解をチェックする．

$$\text{左辺}=\frac{1}{2}(n+3)!-(n+1)\frac{1}{2}(n+2)!=(n+2)!=\text{右辺},$$

そして初期値は $x_0=1$．ゆえに解は方程式と初期値を満たしている．

問 1.5 差分式

$$ax_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n$$

に $x_n=A\alpha^n+B\beta^n$ を代入すると

$$\begin{aligned}&=a(A\alpha^{n+2}+B\beta^{n+2})+b(A\alpha^{n+1}+B\beta^{n+1})+c(A\alpha^n+B\beta^n)\\&=A\alpha^n(a\alpha^2+b\alpha+c)+B\beta^n(a\beta^2+b\beta+c)\end{aligned}$$

α, β は 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解であるから確かに x_n は差分方程式を満たしている．

問 1.6 差分方程式の左辺に $x_n=(A+Bn)\alpha^n$ を代入すると

$$A\alpha^n(a\alpha^2+b\alpha+c)+B\alpha^n n(a\alpha^2+b\alpha+c)+B\alpha^{n+1}(2a\alpha+b)$$

となる．α は 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の重解であるから $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ である．これらを代入すると確かに x_n は差分方程式を満たしている．

問 1.7

$$C[f,g]_n = \sin(kn)\cos(k(n+1)) - \sin(k(n+1))\cos(kn) = -\sin k$$

問 1.8 カソラチ行列式 $C[f',g']_n$ に f'_n, g'_n を代入して整理すると

$$\begin{aligned} C[f',g']_n &= \det\begin{pmatrix} af_n + bg_n & af_{n+1} + bg_{n+1} \\ cf_n + dg_n & cf_{n+1} + dg_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= (ad - bc)\det\begin{pmatrix} f_n & f_{n+1} \\ g_n & g_{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって

$$C[f',g']_n = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} C[f,g]_n$$

である．このことより，$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ ならば f'_n, g'_n も基本解になる．

問 1.9 (i) 特性方程式 $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0$ の解によって与式の一般解は

$$x_n = c_1 2^n + c_2 3^n$$

と表現される．初期条件 $x_0 = c_1 + c_2 = 2$, $x_1 = 2c_1 + 3c_2 = 3$ を解いて $c_1 = 3$, $c_2 = -1$ を得る．ゆえに

$$x_n = 3 \cdot 2^n - 3^n$$

(ii) 特性方程式 $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0$ の解によって与式の一般解は

$$x_n = c_1 + c_2 2^n$$

と表現される．初期条件 $x_0 = c_1 + c_2 = 1$, $x_1 = c_1 + 2c_2 = 2$ を解いて $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ を得る．ゆえに

$$x_n = 2^n$$

(iii) この問題は 3 ページの例題 2a で述べたフィボナッチ数列を表している．特性方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 つの解

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

によって与式の一般解は

$$x_n = c_1 p^n + c_2 q^n$$

と表現される．初期条件 $x_0 = c_1 + c_2 = 0$, $x_1 = c_1 p + c_2 q = 1$ を解いて $c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $c_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ を得る．ゆえに

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

(iv) 特性方程式 $x^2-4x+4=0$ は重解 $x=2$ を持つ．よって与式の一般解は

$$x_n=(c_1+c_2n)2^n$$

と表現される．初期条件 $x_0=c_1=1$, $x_1=(c_1+c_2)2=3$ を解いて $c_1=1$, $c_2=\dfrac{1}{2}$ を得る．ゆえに

$$x_n=\left(1+\frac{1}{2}n\right)2^n$$

(v) 特性方程式 $x^2+x+1=0$ は複素解 $x=\dfrac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$ を持つ．極表示を使うと $x=\exp(\pm i2\pi/3)$ である．よって与式の一般解は

$$x_n=c_1\cos(2n\pi/3)+c_2\sin(2n\pi/3)$$

と表現される．初期条件より $x_0=c_1=0$, $x_1=-c_1\dfrac{1}{2}+c_2\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1$ を解いて $c_1=0$, $c_2=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ を得る．ゆえに

$$x_n=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n\pi}{3}$$

問 1.10 与式 $P+Q=E$ に

(a) 左から P を掛けると $P^2+PQ=P$，条件式 $PQ=O$ より $P^2=P$

(b) 右から Q を掛けると $PQ+Q^2=Q$，条件式 $PQ=O$ より $Q^2=Q$

(c) 左から Q を掛けると $QP+Q^2=Q$, (b) の $Q^2=Q$ より $QP=O$

問 1.11 $M^{n-1}=c_1^{n-1}P+c_2^{n-1}Q$ であると仮定する．両辺に右から M を掛けると

$$M^{n-1}M=(c_1^{n-1}P+c_2^{n-1}Q)(c_1P+c_2Q)=c_1^nP+c_2^nQ$$

となる．したがって数学的帰納法により

$$M^n=c_1^nP+c_2^nQ$$

が成り立つ．

問 1.12 $P=\begin{pmatrix}2&1\\-2&-1\end{pmatrix}$ を与式 $P+Q=E$ に代入して $Q=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&2\end{pmatrix}$ を得る．PQ を計算すると

$$PQ=\begin{pmatrix}2&1\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\2&2\end{pmatrix}=O$$

である．

$$M=\begin{pmatrix}5&3\\-6&-4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}2&1\\-2&-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1&-1\\2&2\end{pmatrix}$$

とおくと $c_1 = 2,\ c_2 = -1$ を得る．問 1.11 の結果より

$$
\begin{aligned}
M^n &= c_1^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + c_2^n \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1} + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} \\ -2^{n+1} + 2(-1)^n & -2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．

問 1.13 (i) 与式より特性方程式は $p^2 - 5p + 6 = (p-2)(p-3) = 0$ となり同次方程式の解 $\hat{x}_n$ は $c_1,\ c_2$ を定数とすると

$$\hat{x}_n = c_1 2^n + c_2 3^n$$

となる．定数は同次方程式の解ではないので，a_0 を定数として特殊解を $z_n = a_0$ と仮定し，与式に代入すると

$$a_0 - 5a_0 + 6a_0 = 2a_0 = 2$$

となり，$a_0 = 1$ が得られる．これより $z_n = 1$ である．一般解は

$$x_n = c_1 2^n + c_2 3^n + 1$$

で与えられ，初期値 $x_1 = 2,\ x_2 = 2$ より $c_1 = 1,\ c_2 = -\dfrac{1}{3}$ となる．求める解は

$$x_n = 2^n - 3^{n-1} + 1$$

である．

(ii) 与式より特性方程式は $p^2 - 3p + 2 = (p-1)(p-2) = 0$ となり同次方程式の解 $\hat{x}_n$ は $c_1,\ c_2$ を定数とすると

$$\hat{x}_n = c_1 + c_2 2^n$$

となる．定数は同次方程式の解であるので，特殊解を $z_n = a_1 n + a_2 n^2$（$a_1,\ a_2$ は定数）と仮定して，与式に代入すると

$$(a_1(n+2) + a_2(n+2)^2) - 3(a_1(n+1) + a_2(n+1)^2) + 2(a_1 n + a_2 n^2) = 2n - 1$$

となる．n^2 の係数は $a_2 - 3a_2 + 2a_2 = 0$ であり，n^1 の係数より $a_1 + 4a_2 - 3(a_1 + 2a_2) + 2a_1 = 2$ となり $a_2 = -1$ が得られ，n^0 の係数より $2a_1 + 4a_2 - 3(a_1 + a_2) = -1$ となり $a_1 = 0$ が得られる．これより $z_n = -n^2$ である．一般解は

$$x_n = c_1 + c_2 2^n - n^2$$

で与えられ，初期値 $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ より $c_1 = -2,\ c_2 = 2$ となる．求める解は

$$x_n = -2 + 2^{n+1} - n^2$$

である．

(iii) 与式より特性方程式は $p^2-4p+4=(p-2)^2=0$ となり，重解になるので同次方程式の解 $\hat{x}_n$ は c_1, c_2 を定数とすると

$$\hat{x}_n=(c_1+c_2n)2^n$$

となる．定数は同次方程式の解ではないので，特殊解を $z_n=a_0$（a_0 は定数）と仮定して，与式に代入すると

$$a_0-4a_0+4a_0=a_0=1$$

となる．これより $z_n=1$ である．一般解は

$$x_n=(c_1+c_2n)2^n+1$$

で与えられ，初期値 $x_1=1$, $x_2=3$ より $c_1=-1/2$, $c_2=1/2$ となる．求める解は

$$x_n=(n-1)2^{n-1}+1$$

である．

(iv) 与式より特性方程式は $p^2-6p+8=(p-2)(p-4)=0$ となり，同次方程式の解 $\hat{x}_n$ は c_1, c_2 を定数とすると

$$\hat{x}_n=c_12^n+c_24^n$$

となる．2^n は同次方程式の解であるので，特殊解を $z_n=a_1n2^n+a_23^n$（a_1, a_2 は定数）と仮定して与式に代入すると

$$(a_1(n+2)2^{n+2}+a_23^{n+2})-6(a_1(n+1)2^{n+1}+a_23^{n+1})+8(a_1n2^n+a_23^n)=2^n+3^n$$

となる．$n2^n$ の係数は $4a_1-12a_1+8a_1=0$ であり，2^n の係数より $8a_1-12a_1=1$ となり $a_1=-1/4$ が得られ，3^n の係数より $9a_2-18a_2+8a_2=1$ となり $a_2=-1$ が得られる．これより $z_n=-n2^{n-2}-3^n$ である．一般解は

$$x_n=c_12^n+c_24^n-n2^{n-2}-3^n$$

で与えられ，初期値 $x_1=2$, $x_2=-1$ より $c_1=3$, $c_2=-1/8$ となる．求める解は

$$x_n=3\cdot 2^n-\frac{1}{8}4^n-n2^{n-2}-3^n$$

である．

問 1.14　与式の非同次項 $A\cos(\theta n)+B\sin(\theta n)$ は同次方程式

$$x_{n+1}-2\cos\theta\, x_n+x_{n-1}=0$$

の解になっているので特殊解として

$$z_n=n[a\cos(\theta n)+b\sin(\theta n)],\qquad a,\ b \text{ は定数}$$

を選ぶ．これを与式に代入して

$$(n+1)[a\cos(\theta(n+1))+b\sin(\theta(n+1))]-2n\cos\theta[a\cos(\theta n)+b\sin(\theta n)]$$
$$+(n-1)[a\cos(\theta(n-1))+b\sin(\theta(n-1))]=A\cos(\theta n)+B\sin(\theta n)$$

を得る．

$n\cos(\theta n)$, $n\sin(\theta n)$ の係数は 0 になり，上式は

$$2\sin\theta[-a\sin(\theta n)+b\cos(\theta n)]=A\cos(\theta n)+B\sin(\theta n)$$

となる．ゆえに $a=-\dfrac{B}{2\sin\theta}$, $b=\dfrac{A}{2\sin\theta}$ である．したがって求める特殊解は

$$z_n=n\Big(-\frac{B}{2\sin\theta}\cos(\theta n)+\frac{A}{2\sin\theta}\sin(\theta n)\Big)$$

である．

第4章

問 4.1 $A\ge B\ge C$ の場合，左辺 $=\max(A,B)=A$, 右辺 $=\max(A,C)=A$. 他の場合も同様．

問 4.2 $A\ge 0$ で $A\ge -A$, $A<0$ で $A<-A$ より明らか．

問 4.3

$$\max(C,\max(A,\max(D,B)))\overset{\text{交換}}{=}\max(\max(A,\max(B,D)),C)$$
$$\overset{\text{結合}}{=}\max(A,\max(\max(B,D),C))\overset{\text{結合}}{=}\max(A,\max(B,\max(D,C)))$$
$$\overset{\text{交換}}{=}\max(A,\max(B,\max(C,D))),$$
$$\max(\max(D,C),\max(B,A))\overset{\text{交換}}{=}\max(\max(C,D),\max(A,B))$$
$$\overset{\text{交換}}{=}\max(\max(A,B),\max(C,D))\overset{\text{結合}}{=}\max(A,\max(B,\max(C,D)))$$

問 4.4 $\max(0,x)\ge 0$ は明らか．したがって $\max(\max(0,x),-\max(x,-x))\ge\max(0,x)\ge 0$.

問 4.5 $B\ge C$ の場合，$\max(B,C)=B$ より 左辺 $=A+B$ であり，$A+B\ge A+C$ より 右辺 $=A+B$ であるので等式が成り立つ．$B<C$ の場合も同様．

問 4.6 (i) $\max(A,B)+\max(C,D)\overset{\text{分配}}{=}\max(A+\max(C,D),B+\max(C,D))$

$$\overset{\text{分配}}{=}\max(\max(A+C,A+D),\max(B+C,B+D))$$
$$=\max(A+C,A+D,B+C,B+D)$$

(ii) $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

問 4.7 (i) $A \geq B$ のとき両辺ともに pA, $A < B$ のとき pB.

(ii) $\max(2A, A+B, 2B) = 2A$ $(A \geq B)$, $2B$ $(A < B)$ より明らか.

注：$2\max(A,B) = \max(A,B) + \max(A,B) = \max(2A, A+B, B+A, 2A) = \max(2A, A+B, 2B)$ でもよい.

(iii) $\max(3A, 2A+B, 3B) = 3A$ $(A \geq B)$, $3B$ $(A < B)$ より明らか.

問 4.8 $A + A + A = 3A, \quad 2\max(A,B) = \max(2A, A+B, 2B)$

問 4.9 (i) $\max(A,3) = 5$ ならば $A = 5$. $\max(A,3) = 3$ ならば A は 3 以下の任意の数. $\max(A,3) = -1$ ならば等式を満たす A は存在しない.

(ii) $\max(A,B) \geq B$ なので $B \leq C$ でなければならない. さらに $B = C$ のとき $A \leq B = C$, $B < C$ のとき $A = C$ であれば等式が成立する.

問 4.10 $A \geq B$ の場合, $\min(A,B) = B$ であり, また $-A \leq -B$ より $-\max(-A,-B) = B$ となるので等式が成り立つ. $A < B$ の場合も同様.

問 4.11 $\min(x,y) \overset{(4.4)}{=} -\max(-x,-y) = -\max(-(x+y)+y, -(x+y)+x) \overset{分配}{=} x + y - \max(y,x)$

問 4.12 $x \geq 0$ のとき 与式 $= \min(x,1)$ したがって $x \geq 1$ のとき 1, $x < 1$ のとき x. 一方 $x < 0$ のとき 与式 $= \min(0, \max(1,-x)) = 0$. 答：$x < 0$ で 0, $0 \leq x < 1$ で x, $1 \leq x$ で 1.

問 4.13 (i) $1 = e^{0/\varepsilon}$ より $\max(0,A)$　(ii) $\max(0, A-1)$　(iii) $\max(A, 2A)$　(iv) $\max(A,B) - \max(0,A,B)$　(v) $\max(0,A) + \max(A,2B) - 2\max(0,A+B)$

問 4.14 $A_1 \sim A_n$ のうち最大のものを A_m とする（A_m に等しいものが複数個あっても構わない）. このとき

$$\text{左辺} = A_m + \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(e^{(A_1 - A_m)/\varepsilon} + \cdots + e^{(A_{m-1} - A_m)/\varepsilon} + 1 + e^{(A_{m+1} - A_m)/\varepsilon} + \cdots + e^{(A_n - A_m)/\varepsilon})$$

となり, $A_i - A_m \leq 0$ なので $\lim_{\varepsilon \to +0}$ の項は 0 になる. したがって左辺は $A_1 \sim A_n$ の最大値に等しい.

問 4.15 $\varepsilon = -\varepsilon'$ とすると

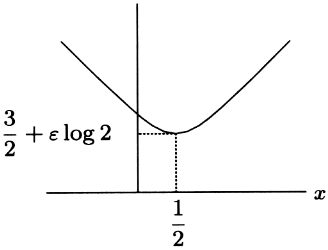
$$\text{原式} = \lim_{\varepsilon' \to +0} -\varepsilon' \log(e^{-A/\varepsilon'} + e^{-B/\varepsilon'}) = -\max(-A,-B) = \min(A,B)$$

問 4.16 (i) $C = -\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}) = -\max(A,B)$

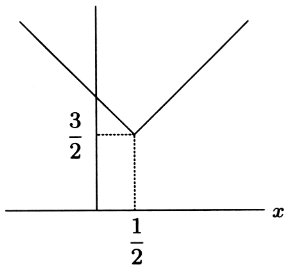
(ii) $C = \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{2A/\varepsilon} + 2e^{B/\varepsilon}) = \max(A, 2A, B)$

(iii) $C = \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon})(e^{2A/\varepsilon} + e^{2B/\varepsilon}) = \max(A, B) + \max(2A, 2B)$
$= 3\max(A, B)$

問 4.17 (i) $f'(x) = (-e^{(-x+2)/\varepsilon} + e^{(x+1)/\varepsilon})/(e^{(-x+2)/\varepsilon} + e^{(x+1)/\varepsilon}) = 0$ とおくと $x = 1/2$. $x < 1/2$ で $f'(x) < 0$, $x > 1/2$ で $f'(x) > 0$. したがって $x = 1/2$ のとき $f(x)$ は最小値 $\varepsilon \log(2e^{3/2\varepsilon}) = 3/2 + \varepsilon \log 2$ をとる.



(ii) $g(x) = \max(-x+2, x+1)$



問 4.18 $X_n = \alpha$ を代入すると次式を得る.

$$\max(0, X_{n+1}, \alpha + X_{n+1}) = \alpha$$

左辺 $\geq \alpha + X_{n+1}$ なので, 等式が成立するには $X_{n+1} \leq 0$ でないといけない. したがって

$$\max(0, \alpha + X_{n+1}) = \alpha$$

となる. これより $\alpha < 0$ のとき等式を満たす X_{n+1} は存在せず, $\alpha = 0$ のとき $X_{n+1} \leq 0$, $\alpha > 0$ のとき $X_{n+1} = 0$ となる.

問 4.19 線分の端点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ とすると，線分を $t:1-t$ に内分する点の位置ベクトルは $(1-t)\boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{r}_2$ となる．線形写像を表す行列を A とすると，内分点は位置ベクトルが

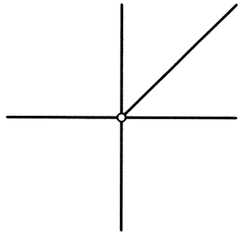
$$A((1-t)\boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{r}_2) = (1-t)A\boldsymbol{r}_1 + tA\boldsymbol{r}_2$$

で表される点に写像される．これは $A\boldsymbol{r}_1$, $A\boldsymbol{r}_2$ を端点とする線分を $t:1-t$ に内分する点になっている．また，任意の t に対してこのことが成り立つので線分は線分に写像される．

問 4.20 (i) 横軸の正の部分の任意の点 P を考え，その座標を $(t,0)$ とする $(t>0)$．P は以下のように写像される．

$$(t,0) \to (0,-t) \to (-t,0) \to (0,t) \to (t,t) \to (t,0) \to \cdots$$

したがって得られる図形は



(ii) 線分上の任意の点 P を $(t,1-t)$ と表す．ただし $0 \le t \le 1$ である．P は以下のように写像される．

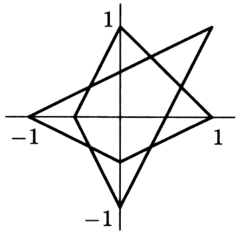
$0 \le t \le 1/2$ の場合

$$(t,1-t) \to (1-t,1-2t) \to (1-2t,-t) \to (-t,2t-1)$$
$$\to (2t-1,t) \to (t,1-t)$$

$1/2 < t \le 1$ の場合

$$(t,1-t) \to (1-t,1-2t) \to (1-2t,t-1) \to (t-1,2t-1)$$
$$\to (2t-1,t) \to (t,1-t)$$

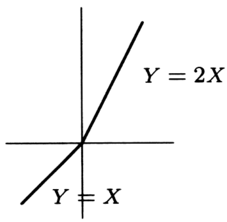
したがって得られる図形は以下の通り．



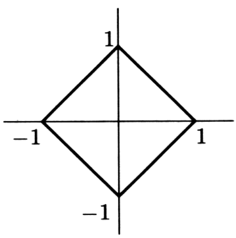
問 4.21 (i) 内部領域は $-1 \leq X \leq 1$, $-1 \leq Y \leq 1$ で表される．これは $-X$, X, $-Y$, Y のすべてが 1 以下であるという条件に等しい．したがって $\max(-X, X, -Y, Y) \leq 1$. ゆえに境界の多角形は $\max(-X, X, -Y, Y) = 1$.

(ii) 内部領域は $-1 \leq X \leq 1$, $-1 \leq Y$, $X + Y \leq 1$, $Y - X \leq 1$ で表される．これは $-X$, X, $-Y$, $X + Y$, $Y - X$ のすべてが 1 以下であるという条件に等しい．したがって境界の多角形は $\max(-X, X, -Y, X + Y, Y - X) = 1$.

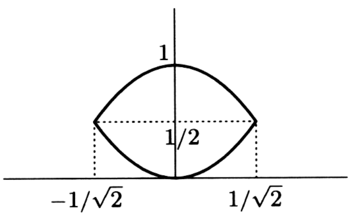
問 4.22 (i) $\max(X - Y, 2X - Y) \leq 0$ が表す領域は $X - Y \leq 0$, $2X - Y \leq 0$. したがってその境界は次図のようになる．



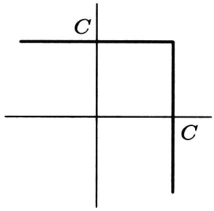
(ii) $\max(X - Y, Y - X, X + Y, -X - Y) \leq 1$ が表す領域は $X - 1 \leq Y \leq X + 1$, $-X - 1 \leq Y \leq -X + 1$. したがってその境界は次図のようになる．



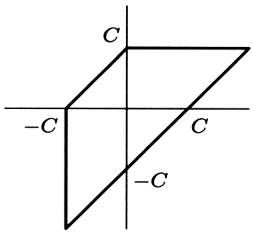
(iii) $\max(X^2 - Y, Y + X^2 - 1) \leq 0$ が表す領域は $X^2 \leq Y \leq -X^2 + 1$. したがってその境界は次図のようになる．



問 4.23 (i) $\max(2X, 2Y) = 2C$ より $\max(X, Y) = C$



(ii) $\max(2X, 2Y, X+2Y, Y) - X - Y = C$ すなわち $\max(X-Y, Y-X, Y, -X) = C$ より



ただし $C < 0$ の場合は方程式を満たす X, Y が存在しない.

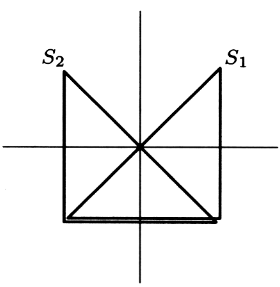
問 4.24 略.

問 4.25 (i) S_1, S_2 を表す max の式はそれぞれ

$$\max(X-1, -Y-1, -X+Y) = 0,$$
$$\max(-X-1, -Y-1, X+Y) = 0$$

である. したがって

$$\min(\max(X-1, -Y-1, -X+Y), \max(-X-1, -Y-1, X+Y)) = 0$$

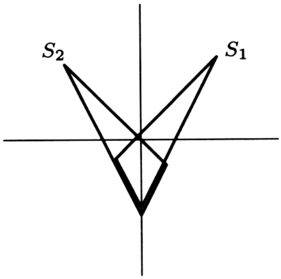


(ii) S_1, S_2 を表す max の式はそれぞれ

$$\max(-X+Y, 2X-Y-1, -2X-Y-1) = 0,$$
$$\max(X+Y, 2X-Y-1, -2X-Y-1) = 0$$

である．したがって

$$\min(\max(-X+Y, 2X-Y-1, -2X-Y-1), \max(X+Y, 2X-Y-1, -2X-Y-1)) = 0$$



問 4.26 (i) X_n : 1, 0, 0, −1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, ... となるので 8 周期解が得られる．
(ii) X_n : 1, −1, −2, −1, 1, 3, 4, 3, 1, −1, −2, ... となるので 8 周期解が得られる．
(iii) X_n : $\sqrt{2}$, 1, $-\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$, −1, $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}-1$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 1, $-\sqrt{2}$, ... となるので 8 周期解が得られる．

問 4.27 (i) X_n : a, b, c, $b-a$, $c-b$, $-c$, $a-b$, $a-c$, a, b, c, ... となるので 8 周期解が得られる．
(ii) X_n : a, b, c, $c-a$, $c-b$, $-b$, $a-b$, $a-c$, a, b, c, ... となるので 8 周期解が得られる．

問 4.28 (i) (a) $x_{n+1} = \dfrac{1+cx_n}{x_{n-1}x_n}$　　(b) $x_{n+1} = \dfrac{1+cx_n}{x_{n-1}x_n^2}$
(ii) (a) $X_{n+1} = \max(0, X_n+1) - X_n - X_{n-1}$
(b) $X_{n+1} = \max(0, X_n+1) - 2X_n - X_{n-1}$

問 4.29 固定点を仮定して $X_{n-1} = X_n = X_{n+1} = \alpha$ とする．(4.22) に代入すると

$$2\alpha = \max(0, \alpha+1)$$

右辺 ≥ 0 なので $\alpha \geq 0$ したがって $2\alpha = \alpha + 1$．ゆえに $\alpha = 1$．

問 4.30 $C=-1$ を代入すると

$$X_{n+1}=\max(0,X_n-1)-X_{n-1}$$

となる．問題で述べられていることより，任意の n で $X_n\le 1$ でなければならない．このとき上の方程式は

$$X_{n+1}=-X_{n-1}$$

となる．すると

$$X_2=-X_0,\quad X_3=-X_1,\quad X_4=X_0,\quad X_5=X_1$$

となるので周期 4 の解になる．また $X_0\sim X_3$ がすべて 1 以下という条件より

$$X_0\le 1,\quad X_1\le 1,\quad -X_0\le 1,\quad -X_1\le 1$$

すなわち

$$-1\le X_0\le 1,\quad -1\le X_1\le 1$$

を満たせば，解は常にこの領域をはみ出さず，固定点を除き常に周期 4 で元に戻る．なお固定点は $(0,0)$ である．

問 4.31 $(6,6)$ を初期値にする場合

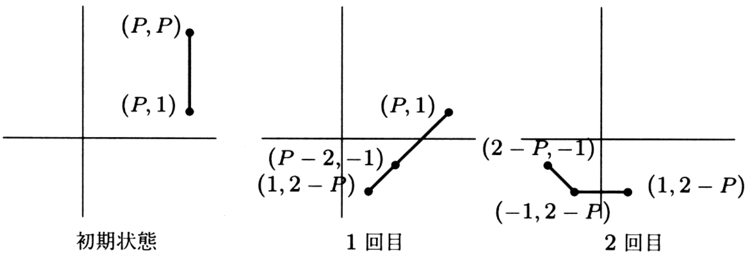
$$X_n: 6,\ 6,\ 1,\ -4,\ -1,\ 4,\ 6,\ 3,\ -2,\ -3,\ 2,\ 6,\ 5,\ 0,\ -4,\ 0,\ 5,\ 6,\ 2,\ -3,\ -2,\ 3,\ 6,\ 4,\ -1,\ -4,\ 1,\ 6,\ 6,\ \ldots$$

より周期は 27 となる．$(7,7)$ を初期値にする場合

$$X_n: 7,\ 7,\ 1,\ -5,\ -1,\ 5,\ 7,\ 3,\ -3,\ -3,\ 3,\ 7,\ 5,\ -1,\ -5,\ 1,\ 7,\ 7,\ \ldots$$

より周期は 16 となる．

問 4.32 相平面内で直線 $X_n=-1$ より上の領域と下の領域はそれぞれ別の線形写像によって写像されることに注意する．



問 4.33 $G(X,Y) \leq 3$ が表す領域は，連立不等式

$$-2 \leq X+Y, \quad -1 \leq X \leq 3, \quad -1 \leq Y \leq 3, \quad X-2 \leq Y \leq X+2$$

で表される．最初の不等式は後の条件 $-1 \leq X$, $-1 \leq Y$ によって満足されるので考えなくてよい．この領域の周囲が $G(X,Y)=3$ を満たす図形であり，図に描いて確かめれば六角形 H に等しいことがわかる．

問 4.34 $C=-1$ の場合

$$\begin{aligned} G(X,Y) &= -X-Y+\max(-1, \max(0,-2)+\max(X,Y), \\ &\qquad -1+\max(2X,2Y),\ X+Y+\max(X,Y)) \\ &= \max(-1-X-Y,\ -X,\ -Y,\ X-Y-1,\ Y-X-1,\ X,\ Y) \end{aligned}$$

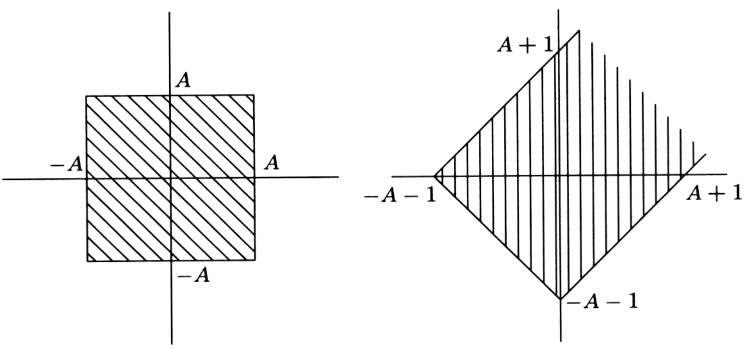
となる．max の中に X と $-X$ が含まれているので $G(X,Y) \geq 0$ となる．よって $G(X,Y)=A$ を満たす X, Y は $A<0$ ならば存在しない．

$A \geq 0$ の場合，$G(X,Y) \leq A$ の条件は

$$-A \leq X \leq A \quad ① \qquad -A \leq Y \leq A \quad ②$$

$$-X-A-1 \leq Y \quad ③ \qquad X-A-1 \leq Y \quad ④ \qquad Y \leq X+A+1 \quad ⑤$$

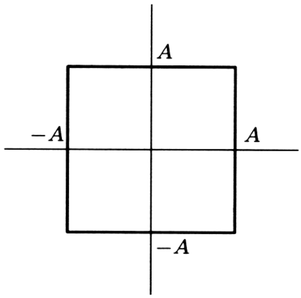
の 5 つの条件を同時に満たすことと等価である．①，②の条件が表す領域を (a) の図に，③～⑤の条件が満たす領域を (b) の図に示す．



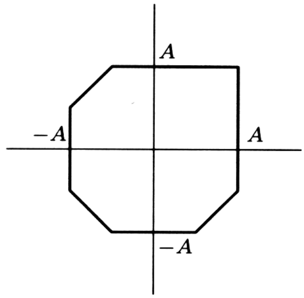
(a) (b)

$A \leq 1$ の場合は (a) の領域が (b) の領域に完全に含まれ，$1<A$ の場合は (a) の領域が (b) の領域をはみ出る．以上のことより $G(X,Y)=A$ が表す図形は，まず $A<0$ のとき

存在せず，その他の場合は次図のようになる．



$0 \leq A \leq 1$ の場合



$1 < A$ の場合

問 4.35 それぞれの時間発展則は以下の通り．

	111	110	101	100	011	010	001	000
ルール番号 6	0	0	0	0	0	1	1	0
94	0	1	0	1	1	1	1	0
174	1	0	1	0	1	1	1	0

時間発展は以下の通り（0 を . で表す）．

ルール番号 6	ルール番号 94	ルール番号 174
.....111.1.11....	.....111.1.11....	.....111.1.11....
....1....1........	....11.1.1.111...	....111.1111.....
...11...11.......	...111.1.1.1.11..	...111.1111......
..1....1.........	..11.1.1.1.1.111.	..111.1111.......

問 4.36 それぞれの時間発展則は以下の通り．

	111	110	101	100	011	010	001	000
ルール番号 2	0	0	0	0	0	0	1	0
144	1	0	0	1	0	0	0	0

ルール番号 2 について：初期状態に含まれる連続する 1 の並びに注目する．次図（0 を . で表す）のように左端の 1 の左隣の 0 が次の時刻で 1 になり，それ以外はすべて 0 になる．その時刻以降は残った 1 が時間とともに左へずれる．

```
...11···11...
..1..··.....
.1...··.....
```

ルール番号 144 について：1 が 5 ～ 9 個並んだ状態から時間発展をそれぞれ調べると，以下のようになる（0 を . で表す）．

```
..11111......   ..111111......   ..1111111......
...111.1.....   ...1111.1.....   ...11111.1.....
....1...1....   ....11...1....   ....111...1....
.....1...1...   ......1...1...   .....1.1...1...
......1...1..   .......1...1..   ........1...1..

..11111111.......   ..111111111.......
...111111.1......   ...1111111.1......
....1111...1.....   ....11111...1.....
.....11.1...1....   .....111.1...1....
.........1...1...   ......1...1...1...
..........1...1..   .......1...1...1..
```

以上の観察を一般の場合に敷衍すると以下の法則が導かれる．まず，連続する 1 の並びは 1 時刻毎に幅を 2 ずつ減らしていく．このとき，右端から 2 時刻に 1 回の割合で 1 を放出する．放出された 1 は右に移動していく．元々の連続する 1 の並びに m 個の 1 が含まれているとすると，放出される 1 の個数は全部で $(m+3)/4$ の整数部に等しい．

問 4.37 以下の公式が max と min について常に成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&① \quad \min(x,y) = -\max(-x,-y) \\
&② \quad \max(x,y) + c = \max(x+c, y+c) \\
&③ \quad \max(x,y) + \min(x,y) = x + y
\end{aligned}
$$

これら①～③を用いて以下のように変形を行えばよい．

$$
\begin{aligned}
&\min(\max(U_{j-1}^n, U_{j+1}^n),\ 1 - \min(U_{j-1}^n, U_{j+1}^n)) \\
&\overset{①}{=} -\max(-\max(U_{j-1}^n, U_{j+1}^n),\ \min(U_{j-1}^n, U_{j+1}^n) - 1) \\
&\overset{②}{=} \max(U_{j-1}^n, U_{j+1}^n) - \max(0, \max(U_{j-1}^n, U_{j+1}^n) + \min(U_{j-1}^n, U_{j+1}^n) - 1) \\
&\overset{③}{=} \max(U_{j-1}^n, U_{j+1}^n) - \max(0, U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 1)
\end{aligned}
$$

問 4.38 $U_{j-1}^n = 2$, $U_{j+1}^n = 1$ とすれば，(4.29) からは $U_j^{n+1} = 0$, (4.30) からは $U_j^{n+1} = 1$ となるので異なる方程式である．

問 4.39 (i) $U_j^{n+1} = \max(U_{j-1}^n, U_j^n)$ と書き換えられる．

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n + u_j^n$$

とすれば $u_j^n = e^{U_j^n/\varepsilon}$, $\varepsilon \to +0$ の超離散化によって上の式が得られる．

(ii)

$$
\begin{aligned}
U_j^{n+1} &= \min(U_{j-1}^n,\ \max(U_j^n, 1 - U_{j+1}^n)) \\
&= -\max(-U_{j-1}^n,\ -\max(U_j^n, 1 - U_{j+1}^n))
\end{aligned}
$$

と書き換えられる．

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{1/u_{j-1}^n + 1/(u_j^n + \alpha/u_{j+1}^n)}$$

とすれば $u_j^n = e^{U_j^n/\varepsilon}$, $\alpha = e^{1/\varepsilon}$, $\varepsilon \to +0$ の超離散化によって上の式が得られる．

(iii)

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= |\min(U_{j-1}^n, U_j^n) - U_{j+1}^n| \\ &= |\max(-U_{j-1}^n, -U_j^n) + U_{j+1}^n| \\ &= \max(\max(-U_{j-1}^n, -U_j^n) + U_{j+1}^n, -\max(-U_{j-1}^n, -U_j^n) - U_{j+1}^n) \end{aligned}$$

と書き換えられる．

$$u_j^{n+1} = \left(\frac{1}{u_{j-1}^n} + \frac{1}{u_j^n}\right) u_{j+1}^n + \frac{1}{(1/u_{j-1}^n + 1/u_j^n)u_{j+1}^n}$$

とすれば (i) と同じ超離散化によって上の式が得られる．

問 4.40 $U_{j-1}^n = 1$, $U_{j+1}^n = 2$ とすれば，(4.37) からは $U_j^{n+1} = 2$, (4.38) からは $U_j^{n+1} = 1$ となるので異なる方程式である．

問 4.41 ルール番号 234 の ECA の時間発展則を次の表に示す．

111	110	101	100	011	010	001	000
1	1	1	0	1	0	1	0

この時間発展則をたとえば以下の 2 通りに解釈する．

(a) U_{j+1}^n が 1，あるいは，U_{j-1}^n と U_j^n がともに 1 であるときのみ 1 になる．

(b) $U_{j-1}^n + U_j^n + 2U_{j+1}^n$ が 2 以上のときのみ 1 になる．

それぞれを式で表すと，たとえば

$$\begin{aligned} \text{(a) } U_j^{n+1} &= U_{j+1}^n \vee (U_{j-1}^n \wedge U_j^n) = \max(U_{j+1}^n, \min(U_{j-1}^n, U_j^n)) \\ &= \max(U_{j+1}^n, -\max(-U_{j-1}^n, -U_j^n)) \\ \text{(b) } U_j^{n+1} &= \min(1, \max(0, U_{j-1}^n + U_j^n + 2U_{j+1}^n - 1)) \\ &= -\max(-1, -\max(0, U_{j-1}^n + U_j^n + 2U_{j+1}^n - 1)) \end{aligned}$$

となる．そこでたとえば

$$\text{(a) } u_j^{n+1} = u_{j+1}^n + \frac{1}{1/u_{j-1}^n + 1/u_j^n}$$

$$\text{(b) } u_j^{n+1} = \frac{1}{\delta + 1/(1 + \delta u_{j-1}^n u_j^n (u_{j+1}^n)^2)}$$

とすれば $u_j^n = e^{U_j^n/\varepsilon}$, $\delta = e^{-1/\varepsilon}$, $\varepsilon \to +0$ の超離散化により元の式が得られる．

問 4.42 交換則が成り立つことは，$1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$ より明らか．結合則についてはすべての場合をチェックしてもよいが，左辺は交換則より $C \oplus (B \oplus A)$ と変形できるので，A と C が異なる場合についてのみチェックすればよい．すると

A	B	C	$(A \oplus B) \oplus C$	$A \oplus (B \oplus C)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

より，確かに結合則が成り立つ．

問 4.43 $A = 2$, $B = 1$, $C = 1$ とすると

$$(A \oplus'' B) \oplus'' C = 0, \qquad A \oplus'' (B \oplus'' C) = 2$$

となり結合則が成立しない．

問 4.44 略．

問 4.45 時間発展則は以下のようになる．

111	110	101	100	011	010	001	000
1	0	0	1	0	1	1	0

したがってルール番号は $(10010110)_2 = 150$ である．

V_j^n, W_j^n が方程式の解であるとする．$U_j^n = V_j^n \oplus W_j^n$ とすると

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= V_j^{n+1} \oplus W_j^{n+1} = (V_{j-1}^n \oplus V_j^n \oplus V_{j+1}^n) \oplus (W_{j-1}^n \oplus W_j^n \oplus W_{j+1}^n) \\ &= (V_{j-1}^n \oplus W_{j-1}^n) \oplus (V_j^n \oplus W_j^n) \oplus (V_{j+1}^n \oplus W_{j+1}^n) \\ &= U_{j-1}^n \oplus U_j^n \oplus U_{j+1}^n \end{aligned}$$

となるので U_j^n も解になる．

逆超離散化については本文の $\oplus'$, $\boxplus'$ 演算を用いて以下の方針で行えばよい．

$$U_j^{n+1} = U_{j-1}^n \oplus U_j^n \oplus U_{j+1}^n$$

$\uparrow$ 　値を 0, 1 に限定すれば等価

$$U_j^{n+1} = U_{j-1}^n \oplus' U_j^n \oplus' U_{j+1}^n$$

$\uparrow$ 　$u_j^n = e^{U_j^n/\varepsilon}$, $\delta = -1/\varepsilon$, $\varepsilon \to +0$

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n \boxplus' u_j^n \boxplus' u_{j+1}^n$$

こうすれば $\oplus'$, 田$'$ ともに交換則・結合則が成り立つので，それら演算を和と考えれば解の重ね合わせが成立する．したがって求める差分方程式は

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j-1}^n + u_j^n + u_{j+1}^n + \delta u_{j-1}^n u_j^n u_{j+1}^n}{1 + \delta(u_{j-1}^n u_j^n + u_j^n u_{j+1}^n + u_{j+1}^n u_{j-1}^n)}$$

第 5 章

問 5.1

$$w_t = \frac{f_t}{f} = \frac{f_{xx}}{f}, \qquad w_x = \frac{f_x}{f}, \qquad w_{xx} = \frac{f_{xx}}{f} - \frac{(f_x)^2}{f^2},$$
$$\frac{f_{xx}}{f} = (w_x)^2 + w_{xx}$$

したがって

$$w_t = (w_x)^2 + w_{xx}$$

問 5.2

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x'}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial t'}$$

より

$$\frac{\gamma}{\beta}u'_{t'} = \frac{2\gamma^2}{\alpha}u'u'_{x'} + \frac{\gamma}{\alpha^2}u'_{x'x'}$$

ゆえに

$$u'_{t'} = \frac{2\beta\gamma}{\alpha}u'u'_{x'} + \frac{\beta}{\alpha^2}u'_{x'x}$$

問 5.3 (i) $c_1 = 0$ の場合の解は次式で与えられる．

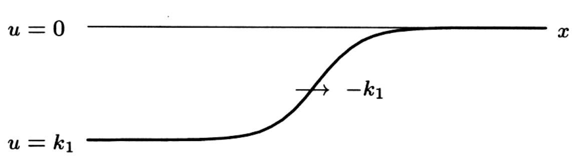
$$u = \frac{k_1}{1 + e^{-(k_1 x + k_1^2 t)}}$$

任意の時刻でこの解を x 軸の負の方向に $1/k_1$ だけずらすと

$$u = \frac{k_1}{1 + e^{-(k_1(x+1/k_1)+k_1^2 t)}} = \frac{k_1}{1 + e^{-(k_1 x + k_1^2 t + 1)}}$$

となり，$c_1 = 1$ の解に一致する．

(ii) $k_1 < 0$ の場合 $\lim_{x\to-\infty} u = k_1$，$\lim_{x\to+\infty} u = 0$ となる．また，解のグラフは $-k_1 > 0$ の速度で x 軸正方向に動く．したがって次図のような右へ $-k_1$ の速度で移動するグラフとなる．



問 5.4 u は次式で与えられる．

$$u = \frac{k_1 e^{k_1(x+k_1 t)} + k_2 e^{k_2(x+k_2 t)}}{1 + e^{k_1(x+k_1 t)} + e^{k_2(x+k_2 t)}}$$

(i) (a) $x + k_1 t \ll 0$, $x + k_2 t \ll 0$ なので $e^{k_1(x+k_1 t)} \sim 0$, $e^{k_2(x+k_2 t)} \sim 0$ となり，$u \sim 0$.

(b) $x + k_1 t \gg 0$ なので $e^{k_1(x+k_1 t)} \gg 1$. また $k_1(x + k_1 t) - k_2(x + k_2 t) = (k_1 - k_2)(x + (k_1 + k_2)t) \gg 0$ なので $e^{k_1(x+k_1 t)} \gg e^{k_2(x+k_2 t)}$ となる．したがって $u \sim k_1$.

(c) $x+k_2 t \gg x+(k_1+k_2)t \gg 0$ なので $e^{k_2(x+k_2 t)} \gg 1$ かつ $e^{k_1(x+k_1 t)} \ll e^{k_2(x+k_2 t)}$. したがって $u \sim k_2$.

(ii) (d) $x + k_1 t \ll x + k_2 t \ll 0$ なので $e^{k_1(x+k_1 t)} \sim 0$, $e^{k_2(x+k_2 t)} \sim 0$ となり $u \sim 0$.

(e) $x+k_2 t \gg 0$ なので $e^{k_2(x+k_2 t)} \gg 1$. また $k_1(x+k_1 t) \ll k_1(x+k_2 t) \ll k_2(x+k_2 t)$ なので $e^{k_1(x+k_1 t)} \ll e^{k_2(x+k_2 t)}$. したがって $u \sim k_2$.

問 5.5 (5.8) より

$$f_j^{n+1} = \alpha f_{j+1}^n + (1 - 2\alpha) f_j^n + \alpha f_{j-1}^n$$

(5.14) より $v_j^n = f_{j+1}^n / f_j^n$ とおくと

$$v_j^{n+1} = \frac{f_{j+1}^{n+1}}{f_j^{n+1}} = \frac{\alpha f_{j+2}^n + (1-2\alpha) f_{j+1}^n + \alpha f_j^n}{\alpha f_{j+1}^n + (1-2\alpha) f_j^n + \alpha f_{j-1}^n}$$

$$= v_j^n \frac{\alpha v_{j+1}^n + 1 - 2\alpha + \alpha / v_j^n}{\alpha v_j^n + 1 - 2\alpha + \alpha / v_{j-1}^n}$$

以上をまとめると

$$\begin{cases} f_j^{n+1} = \alpha f_{j+1}^n + (1-2\alpha) f_j^n + \alpha f_{j-1}^n \\ \qquad \downarrow \quad v_j^n = f_{j+1}^n / f_j^n \\ v_j^{n+1} = v_j^n \dfrac{\alpha v_{j+1}^n + 1 - 2\alpha + \alpha / v_j^n}{\alpha v_j^n + 1 - 2\alpha + \alpha / v_{j-1}^n} \end{cases}$$

問 5.6 $v_j^n = e^{\Delta x u_j^n}$ を (5.15) に代入して両辺 $\dfrac{1}{\Delta x} \log$ をとると

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{\Delta x} \log \frac{e^{\Delta x u_{j+1}^n} + e^{-\Delta x u_j^n}}{e^{\Delta x u_j^n} + e^{-\Delta x u_{j-1}^n}}$$

問 5.7 $N = 1$ の場合 $v_j^n = \dfrac{1 + e^{k(j+1)+\omega n + c}}{1 + e^{kj + \omega n + c}}$ となる．

$$\lim_{j \to +\infty} v_j^n - \lim_{j \to -\infty} v_j^n = \begin{cases} e^k - 1 & (k > 0) \\ 0 & (k = 0) \\ 1 - e^k & (k < 0) \end{cases}$$

問 5.8 (i)

$$
\begin{aligned}
(5.22)\ 右辺 &= U_j^n + \left\{\max\left(U_{j+1}^n - \frac{L}{2},\ -U_j^n + \frac{L}{2}\right) - \frac{L}{2}\right\} \\
&\qquad - \left\{\max\left(U_j^n - \frac{L}{2},\ -U_{j-1}^n + \frac{L}{2}\right) - \frac{L}{2}\right\} \\
&= U_j^n + \max(U_{j+1}^n - L,\ -U_j^n) - \max(U_j^n - L,\ -U_{j-1}^n) \\
&= U_j^n - \min(L - U_{j+1}^n,\ U_j^n) + \min(L - U_j^n,\ U_{j-1}^n) \\
&= (5.21)\ 右辺
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
U_j^{n+1} &= F_{j+1}^{n+1} - F_j^{n+1} + \frac{L}{2} \\
&= \max(F_{j+2}^n,\ F_j^n) - \max(F_{j+1}^n,\ F_{j-1}^n) + \frac{L}{2} \\
&= F_{j+1}^n - F_j^n + \frac{L}{2} \\
&\qquad + \{\max(F_{j+2}^n,\ F_j^n) - F_{j+1}^n\} - \{\max(F_{j+1}^n,\ F_{j-1}^n) - F_j^n\} \\
&= U_j^n + \max\left(U_{j+1}^n - \frac{L}{2},\ -U_j^n + \frac{L}{2}\right) - \max\left(U_j^n - \frac{L}{2},\ -U_{j-1}^n + \frac{L}{2}\right) \\
&= (5.22)\ 右辺
\end{aligned}
$$

問 5.9 問 5.5 で得られた図式に変換を代入すると

$$
\begin{aligned}
F_j^{n+1} &= \varepsilon \log(e^{F_{j+1}^n/\varepsilon} + e^{(F_j^n + L/2 - M)/\varepsilon} + e^{F_{j-1}^n/\varepsilon}) \\
&\downarrow \quad U_j^n = F_{j+1}^n - F_j^n + \frac{L}{2} \\
U_j^{n+1} &= U_j^n + \varepsilon \log \frac{e^{(U_{j+1}^n - L/2)/\varepsilon} + e^{(L/2-M)/\varepsilon} + e^{-(U_j^n - L/2)/\varepsilon}}{e^{(U_j^n - L/2)/\varepsilon} + e^{(L/2-M)/\varepsilon} + e^{-(U_{j-1}^n - L/2)/\varepsilon}}
\end{aligned}
$$

$\varepsilon \to +0$ の極限をとると

$$
\begin{aligned}
F_j^{n+1} &= \max\left(F_{j+1}^n,\ F_j^n + \frac{L}{2} - M,\ F_{j-1}^n\right) \\
&\downarrow \quad U_j^n = F_{j+1}^n - F_j^n + \frac{L}{2} \\
U_j^{n+1} &= U_j^n + \max\left(U_{j+1}^n - \frac{L}{2},\ \frac{L}{2} - M,\ -U_j^n + \frac{L}{2}\right) \\
&\qquad - \max\left(U_j^n - \frac{L}{2},\ \frac{L}{2} - M,\ -U_{j-1}^n + \frac{L}{2}\right)
\end{aligned}
$$

最後の式は変形により次式と等価.

$$
U_j^{n+1} = U_j^n + \min(M,\ U_{j-1}^n,\ L - U_j^n) - \min(M,\ U_j^n,\ L - U_{j+1}^n)
$$

問 5.10 (5.24) 最右辺で第 1 項と第 4 項が max の候補として生き残る必要がある．したがって

$$(\text{第 2 項} \le \text{第 1 項あるいは第 2 項} \le \text{第 4 項})$$
$$\text{かつ}\ (\text{第 3 項} \le \text{第 1 項あるいは第 3 項} \le \text{第 4 項})$$

ゆえに

$$(H_{j-1}^n \le H_{j+1}^n \ \text{あるいは}\ G_{j+1}^n \le G_{j-1}^n)$$
$$\text{かつ}\ (G_{j-1}^n \le G_{j+1}^n \ \text{あるいは}\ H_{j+1}^n \le H_{j-1}^n)$$

問 5.11 超離散方程式での積の演算は + である．G_j^n が (5.19) の解であるとし，$F_j^n = G_j^n + A$（A は定数）を (5.19) に代入すると

$$F_j^{n+1} = G_j^{n+1} + A = \max(G_{j+1}^n, G_{j-1}^n) + A$$
$$= \max(G_{j+1}^n + A, G_{j-1}^n + A) = \max(F_{j+1}^n, F_{j-1}^n)$$

となり，F_j^n も解になる．

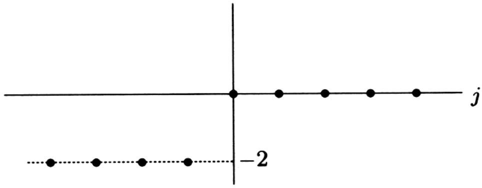
問 5.12 $U_j^n = F_{j+1}^n - F_j^n + \dfrac{L}{2}$ より

$$U_j^n = (K(j+1) + |K|n + C) - (Kj + |K|n + C) + \frac{L}{2} = K + \frac{L}{2}$$

常に定数 $K + \dfrac{L}{2}$ に等しい．

問 5.13 (i) $U_j^n = \max(0,\ -2j + 2n - 2) - \max(0,\ -2j + 2n)$

$n = 0$ のときの解を次図に示す．



U_j^n は $-2j + 2n = -2(j - n)$ にのみ依存するので時間とともに $n = 0$ のグラフが j 軸正方向に 1 格子分ずつずれていく．

(ii) $U_j^n = \max(0,\ -2j + 2n - 2,\ j + n + 1) - \max(0,\ -2j + 2n,\ j + n)$

まず右辺第 2 項の max に注目し，max の中のそれぞれの項が最大になる条件を求める．

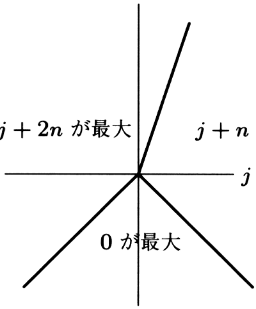
(a) 0 が最大になる場合：$-2j + 2n \le 0,\ j + n \le 0$ より $n \le j,\ n \le -j$

(b) $-2j + 2n$ が最大になる場合：$0 \le -2j + 2n,\ j + n \le -2j + 2n$ より

$j \leq n$, $3j \leq n$. したがって $n \geq 0$ なら $j \leq n/3$, $n \leq 0$ なら $j \leq n$

(c) $j+n$ が最大になる場合：(a), (b) 以外

以上より各項が最大になる領域は図のようになる．



右辺第 1 項の max は右辺第 2 項の max の j を $j+1$ に置き換えれば得られるので，上の領域を左に 1 だけずらせばよい．以上のことより，整数の j, n に対する U_j^n の値は次式で与えられる．

$n < 0$ の場合

$$U_j^n = \begin{cases} -2 & (j \leq n-1) \\ 0 & (n \leq j \leq -n-1) \\ 1 & (-n \leq j) \end{cases}$$

$n \geq 0$ の場合

$$U_j^n = \begin{cases} -2 & (j \leq n/3-1) \\ 3j-n+1 & (n/3-1 < j \leq n/3) \\ 1 & (n/3 < j) \end{cases}$$

問 5.14 (i) 時間発展は図 (a) のようになり，最終的にすべての 1 が時間とともに右へ 1 格子分ずつずれていくパターンが得られる（0 を . で表す）．

(ii) 時間発展は図 (b) のようになり，最終的にすべての 1 が時間とともに左へ 1 格子分ずつずれていくパターンが得られる．

```
.1...111.      .1..1111.
..1..11.1      ..1.111.1
1..1.1.1.      1..111.1.
.1..1.1.1      .1.11.1.1
1.1..1.1.      1.11.1.1.
   (a)            (b)
```

問 5.15 逆にたどることができない．たとえば $\cdots 0010100 \cdots$ という状態の，前の時刻の状態は $\cdots 0101000 \cdots$ か $\cdots 0011000 \cdots$ の 2 通りが考えられる．

問 5.16 (5.27) でたとえば $U_{j-1}^n U_j^n U_{j+1}^n$ が 111 の場合は車が 3 台並んでいることを意味する．すると中央 (j) の車は右 $(j+1)$ に車がいるので動けず，次の時刻で同じ場所にとどまる．したがって $U_j^{n+1}=1$ となる．他の場合も同様に確認できる．

問 5.17 各格子点に L 台までの車が共存できるなら，$L-U_j^n$ は時刻 n，格子点 j での空きスペースを意味する．したがって格子点 $j-1$ にいる車のうち，j の空きスペースに見合う台数だけ右へ進めるという規則を考えると，$j-1$ から j への流入量は $\min(U_{j-1}^n, L-U_j^n)$ になる．つまり (5.21) の各項の意味は (5.28) と同様に以下のようになる．

$$\underbrace{U_j^{n+1}}_{\text{次の時刻の台数}} = \underbrace{U_j^n}_{\text{現在の台数}} + \underbrace{\min(U_{j-1}^n, L-U_j^n)}_{j-1\text{ から }j\text{ への流入量}} - \underbrace{\min(U_j^n, L-U_{j+1}^n)}_{j\text{ から }j+1\text{ への流出量}}$$

問 5.18 (5.30) より $j \geq 1$ のとき

$$\sum_{i=0}^{j-1} U_i^0 = \sum_{i=0}^{j-1}\left(F_{i+1}^0 - F_i^0 + \frac{1}{2}\right) = F_j^0 - F_0^0 + \frac{j}{2}$$

$F_0^0 = 0$ より

$$F_j^0 = \sum_{i=0}^{j-1} U_i^0 - \frac{j}{2} = \left[\frac{j+1}{3}\right] + 2\left[\frac{j}{3}\right] - \frac{j}{2}$$

ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す記号（ガウスの記号）である．

$j \leq -1$ のとき

$$\sum_{i=j}^{-1} U_i^0 = F_0^0 - F_j^0 - \frac{j}{2}$$

ゆえに

$$F_j^0 = -\sum_{i=j}^{-1} U_i^0 - \frac{j}{2} = \left[\frac{j+1}{3}\right] + 2\left[\frac{j}{3}\right] - \frac{j}{2}$$

($j \geq 1$ の場合と同じ形)

問 5.19 まず $\rho = \dfrac{1}{K}\displaystyle\sum_{i=1}^{K} U_i^n$ より $\rho = \dfrac{1}{2}$ になるには K が偶数でなければならない．このとき (5.33) より $F_{j+K}^0 = F_j^0$ が成り立つ．したがって

$$F_j^n = \max(F_{j+n}^0, F_{j+n-2}^0, \ldots, F_{j-n+2}^0, F_{j-n}^0)$$

より $n \gg 0$ で

$$F_j^n = \max(\underbrace{\ldots, F_{j+n+2}^0,}_{\text{新たな項}} F_{j+n}^0, F_{j+n-2}^0, \ldots, F_{j-n+2}^0, F_{j-n}^0 \underbrace{, F_{j-n-2}^0, \ldots}_{\text{新たな項}})$$

とできる．すると F_j^n は $j-n$ の偶奇性にのみ依存するので，

$$F_j^{n+1}=F_{j+1}^n=F_{j-1}^n, \qquad F_{j+2}^n=F_j^n$$

が成立し，U についても

$$U_j^{n+1}=U_{j+1}^n=U_{j-1}^n, \qquad U_{j+2}^n=U_j^n$$

が成立する．これより U_j^n のパターンは次図に示すような 0, 1 の市松模様になる．

$$\begin{array}{lcl} n & : & \cdots 101010 \cdots \\ n+1 & : & \cdots 010101 \cdots \\ n+2 & : & \cdots 101010 \cdots \end{array}$$

問 5.20

$$\begin{aligned} u_t=(\log f)_{xt}&=\frac{f_{xt}}{f}-\frac{f_x f_t}{f^2}=\frac{f_{xxx}+\eta f_x+\eta_x f}{f}-\frac{f_x(f_{xx}+\eta f)}{f^2} \\ &=\frac{f_{xxx}}{f}-\frac{f_x f_{xx}}{f^2}+\eta_x=2uu_x+u_{xx}+\eta_x \end{aligned}$$

問 5.21

$$\begin{aligned} v_j^{n+1}&=\frac{f_{j+1}^{n+1}}{f_j^{n+1}}=\frac{f_{j+2}^n+\beta_{j+1}^n f_{j+1}^n+f_j^n}{f_{j+1}^n+\beta_j^n f_j^n+f_{j-1}^n}=\frac{f_{j+1}^n}{f_j^n}\cdot\frac{f_{j+2}^n/f_{j+1}^n+\beta_{j+1}^n+f_j^n/f_{j+1}^n}{f_{j+1}^n/f_j^n+\beta_j^n+f_{j-1}^n/f_j^n} \\ &=v_j^n\,\frac{v_{j+1}^n+\beta_{j+1}^n+1/v_j^n}{v_j^n+\beta_j^n+1/v_{j-1}^n} \end{aligned}$$

問 5.22

$$\begin{aligned} U_j^{n+1}&=F_{j+1}^{n+1}-F_j^{n+1}+\frac{L}{2} \\ &=\max\Big(F_{j+2}^n,\,F_{j+1}^n+\frac{L}{2}-M_{j+1}^n,\,F_j^n\Big) \\ &\qquad -\max\Big(F_{j+1}^n,\,F_j^n+\frac{L}{2}-M_j^n,\,F_{j-1}^n\Big)+\frac{L}{2} \\ &=F_{j+1}^n-F_j^n+\frac{L}{2}+\max\Big(F_{j+2}^n-F_{j+1}^n-\frac{L}{2},\,-M_{j+1}^n,\,F_j^n-F_{j+1}^n-\frac{L}{2}\Big) \\ &\qquad -\max\Big(F_{j+1}^n-F_j^n-\frac{L}{2},\,-M_j^n,\,F_{j-1}^n-F_j^n-\frac{L}{2}\Big) \\ &=U_j^n+\max(U_{j+1}^n-L,\,-M_{j+1}^n,\,-U_j^n)-\max(U_j^n-L,\,-M_j^n,\,-U_{j-1}^n) \\ &=U_j^n+\min(M_j^n,\,U_{j-1}^n,\,L-U_j^n)-\min(M_{j+1}^n,\,U_j^n,\,L-U_{j+1}^n) \end{aligned}$$

問 5.23 (i) (5.42) より

$$U_j^{n+1}=\min(M_j^n+U_j^n,\,U_{j-1}^n+U_j^n,\,L)-\min(M_{j+1}^n,\,U_j^n,\,L-U_{j+1}^n)$$

右辺第 1 項は L 以下，第 2 項は U, M に対する条件より 0 以上．したがって $U_j^{n+1} \le L$. また，同じく (5.42) より

$$U_j^{n+1} = \min(M_j^n, U_{j-1}^n, L - U_j^n) - \min(M_{j+1}^n - U_j^n, 0, L - U_j^n - U_{j+1}^n)$$

右辺第 1 項は 0 以上，第 2 項は 0 以下．したがって $0 \le U_j^{n+1}$.

(ii) 任意の j, n に対して (i) の条件のもとで $L \le M_j^n$ ならば $U_{j-1}^n \le M_j^n$, $U_j^n \le M_{j+1}^n$. したがって (5.42) の 2 つの min の中の M はともに無視できる．

問 5.24 $j = 3, 4$ 間の信号機は偶数時刻で赤，奇数時刻で青となる．それ以外の信号機は常に青．U_j^n の時空間パターンを $0 \le n \le 7$ の範囲で描く（0 を . で表す）．

```
n = 0 :   1 1 1 . .
    1 :   1 1 1 . .
    2 :   1 1 . 1 .
    3 :   1 . 1 . 1
    4 :   . 1 . 1 1
    5 :   1 . 1 1 .
    6 :   . 1 1 . 1
    7 :   1 1 1 . .
```

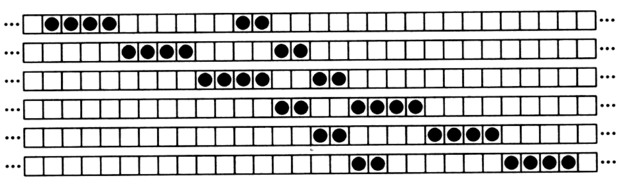
$n = 1, 7$ のパターンが同じであり，信号の点灯も同じ．したがって $n = 7$ 以降は $n = 1 \sim 6$ のパターンを周期的に繰り返す．

第 6 章

問 6.1 ●●● は相互作用後に箱 2 つ分右にずれ，● は 2 つ分左にずれている．

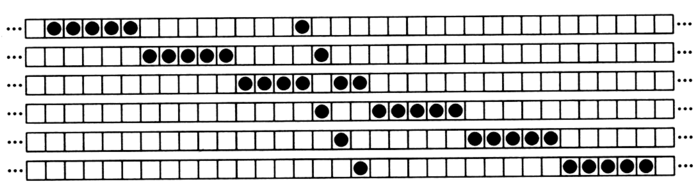
問 6.2 状態の時間変化を時間正負方向にたどる．

(i)



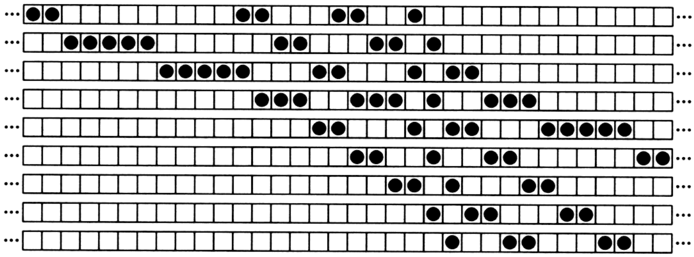
答：●●●● と ●● の 2 つのソリトン

(ii)



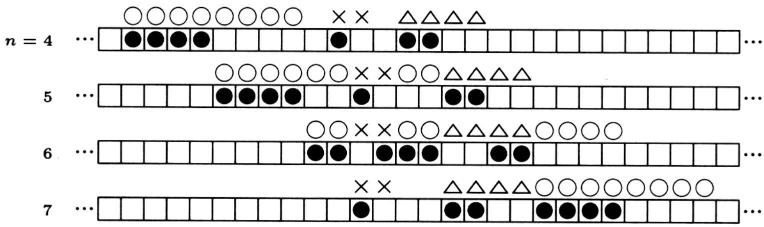
答：●●●●● と ● の 2 つのソリトン

(iii)



答：●●●●●，●●，●●，● の 4 つのソリトン

問 6.3 $n = 4 \sim 7$ の状態についてのみ行う．



問 6.4 小さいソリトンに含まれる玉は 1 個なので，大きいソリトンは箱 2 個分右へ，小さいソリトンは箱 2 個分左へシフトする．このとことは問 6.1 の結果と一致する．

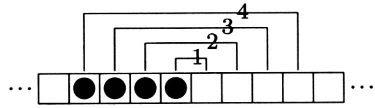
問 6.5 図 6.5 の場合：$N = 3$, $k_1 = 4$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$ である．ソリトン ●●●● は $2(k_2 + k_3) = 6$, ●● は $2(k_3 - k_2) = -2$, ● は $2(-2k_3) = -4$ だけずれる．図でもこのことを確認できる．

図 6.6 の場合：$N = 4$, $k_1 = 4$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$, $k_4 = 1$ である．ソリトン ●●●● は $2(k_2 + k_3 + k_4) = 12$, ●●● は $2(k_3 + k_4 - k_2) = 0$, ●● は $2(k_4 - 2k_3) = -6$, ● は $2(-3k_4) = -6$ だけずれる．図でもこのことを確認できる．

問 6.6 玉の列の左端は □● であり，右端は ●□ である．したがってそれらの個数はともに玉の列の個数に等しい．

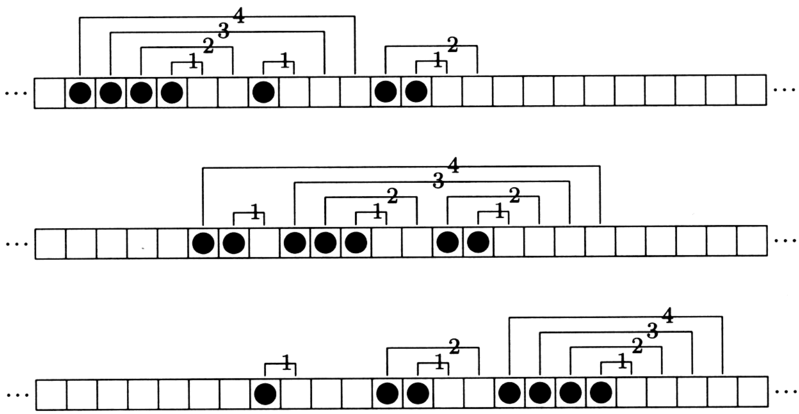
箱に玉があればそれは必ず持ち去られ，手元に玉があれば空箱に玉が入る．したがって ●□ は次の時刻で必ず □● になる．また，時間を逆にたどると次の時刻の □● は前の時刻で必ず ●□ である．したがって前の時刻の ●□ と次の時刻の □● は一対一対応し，個数は等しい．また，各時刻の ●□ と □● の個数は同じなので，●□ の個数は時間がたっても変わらない．

問 6.7 図 6.4 の場合，ペアは常に



である．深さ 1, 2, 3, 4 のペアがそれぞれ 1 個ずつあり，それ以外の深さのペアはすべて 0 個である．

図 6.5 の場合．$n = 5, 6, 7$ で数える．



どの時刻でも深さ 1, 2, 3, 4 のペアがそれぞれ 3, 2, 1, 1 個あり，それ以外の深さのペアがすべて 0 個である．

問 6.8 大きさ k のソリトンは，深さ $1, 2, \ldots, k$ のペアを 1 つずつ有している．したがって今の場合，深さ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 のペアがそれぞれ 8, 6, 5, 5, 2, 2, 2 個あり，それ以外の深さのペアはすべて 0 個である．

問 6.9 ペアの作り方から，深さ n のペアそれぞれの内側に深さ m のペアが 1 個以上存在し，逆に深さ m のペアの内側には深さ n のペアが存在しない．したがって題意が示せた．

問 6.10

$$(\text{深さ } k \text{ のペアの個数}) - (\text{深さ } k+1 \text{ のペアの個数})$$
$$= (\text{大きさ } k \text{ のソリトンの個数})$$

が成り立つ．したがって大きさ 5, 4, 3, 2, 1 のソリトンがそれぞれ 2, 1, 2, 3, 2 個存在している．

問 6.11 (6.1) の両辺に対して $j \to \infty$ の極限をとると，

$$0 = \min\left(1,\ \sum_{i=-\infty}^{\infty} (B_i^n - B_i^{n+1})\right)$$

となる．したがって $\sum_{i=-\infty}^{\infty} (B_i^n - B_i^{n+1}) = 0$ すなわち $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^{n+1}$．このことは玉の総数が一定であることを意味している．

問 6.12 前の時刻の状態を計算するには玉を動かすルールの左右方向を入れ替えればよい．したがって

$$B_j^{n-1} = \min\left(1 - B_j^n,\ \sum_{i=j+1}^{\infty} (B_i^n - B_i^{n-1})\right) \tag{ア}$$

が求める式である．なお，玉の個数が時間によらず一定である，すなわち

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^{n+1} \tag{イ}$$

を用いて，(6.1) から直接導くこともできる．まず，(イ) より

$$\sum_{i=-\infty}^{j-1} (B_i^n - B_i^{n+1}) = \sum_{i=j}^{\infty} (B_i^{n+1} - B_i^n)$$

が成り立つので，(6.1) に代入し以下のように変形する．

$$\begin{aligned}
B_j^{n+1} &= \min\left(1 - B_j^n,\ \sum_{i=j}^{\infty} (B_i^{n+1} - B_i^n)\right) \\
&= \min\left(1 - B_j^n,\ B_j^{n+1} - B_j^n + \sum_{i=j+1}^{\infty} (B_i^{n+1} - B_i^n)\right) \\
&= B_j^{n+1} - B_j^n + \min\left(1 - B_j^{n+1},\ \sum_{i=j+1}^{\infty} (B_i^{n+1} - B_i^n)\right)
\end{aligned}$$

さらに移項して，$n \to n-1$ とすると (ア) が得られる．

問 6.13 $B_j^n = 1 - E_j^n$ を (6.1) に代入する．

$$1 - E_j^{n+1} = \min\left(E_j^n,\ \sum_{i=-\infty}^{j-1} (E_i^{n+1} - E_i^n)\right)$$

したがって

$$E_j^{n+1} = 1 - \min\Big(E_j^n,\ \sum_{i=-\infty}^{j-1} (E_i^{n+1} - E_i^n)\Big)$$

問 6.14 $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt} = \alpha$ より $\dfrac{d\log|x|}{dt} = \alpha$．両辺を t で積分して $\log|x| = \alpha t + C$（C は積分定数）．ゆえに $x = \pm e^{\alpha t + C}$．$x(t_0) = x_0$ より $\pm e^{\alpha t_0 + C} = x_0$，したがって $x = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}$

問 6.15 (i)

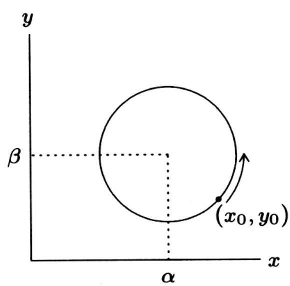
$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{\alpha}{x}\frac{dx}{dt} + \frac{\beta}{y}\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \\ &= \Big(\frac{\alpha}{x} - 1\Big)(\beta - y)x + \Big(\frac{\beta}{y} - 1\Big)(x - \alpha)y \\ &= 0\end{aligned}$$

したがって H は t によらない定数．
(ii) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt} = 0$ より $(\beta - y)x = (x - \alpha)y = 0$．$\alpha$, $\beta > 0$ より $(x, y) = (0, 0)$, (α, β).
(iii) x, y の初期値を x_0, y_0 とすると，H が保存量であることより以降の時刻で x, y は

$$\alpha\log x + \beta\log y - x - y = \alpha\log x_0 + \beta\log y_0 - x_0 - y_0 = \text{定数}$$

を満たさなければならない．すなわち任意の時刻での x, y の値を xy 平面上の点としてプロットすると，その点は上式が表す曲線の上に存在する．

また，$\dfrac{dx}{dt}$ は $0 < y < \beta$ で正，$y = \beta$ で 0, $\beta < y$ で負となり，$\dfrac{dy}{dt}$ は $0 < x < \alpha$ で負，$x = \alpha$ で 0, $\alpha < x$ で正となる．以上を考慮すると，xy 平面内で解が表す点の軌跡は，次図のように点 (α, β) を中心とする $H =$ 定数 上の曲線を左回りに回ることがわかる．



なお，実際の軌跡は円が少しつぶれた形をしている．また，$x \sim 0$ あるいは $y \sim 0$ で $H \sim -\infty$ となるので，$H =$ 定数 が表す軌跡は x 軸，y 軸を横切らない．

問 6.16 $u_j = cu'_j$, $t = t'/c$ を代入すると

$$c^2 \frac{du'_j}{dt'} = c^2 u'_j (u'_{j-1} - u'_{j+1})$$

ゆえに

$$\frac{du'_j}{dt'} = u'_j (u'_{j-1} - u'_{j+1})$$

となる．また，境界条件は $cu'_j \to c$ より $u'_j \to 1$ となる．(注：u, t のスケール変換により，方程式を変えずに境界条件だけを変えられるので，境界条件を 1 に固定して構わない.)

問 6.17 (6.5) の両辺を u_j で割ると

$$\frac{d \log |u_j|}{dt} = u_{j-1} - u_{j+1}$$

(6.6) を左辺に代入して整理すると

$$\frac{d}{dt} \log \left| \frac{f_{j+2}}{f_{j+1}} \right| + u_{j+1} = \frac{d}{dt} \log \left| \frac{f_j}{f_{j-1}} \right| + u_{j-1}$$

したがって

$$\frac{d}{dt} \log \left| \frac{f_{j+1}}{f_j} \right| + u_j = \frac{d}{dt} \log \left| \frac{f_{j+1}}{f_j} \right| + \frac{f_{j-1} f_{j+2}}{f_j f_{j+1}} = \alpha$$

α は一般に j の偶奇および t に依存する定数であるが，$j \to \pm\infty$ とすると境界条件より左辺は 1 に収束するので α は j, t によらずに 1 となる．ゆえに

$$\frac{1}{f_{j+1}} \frac{df_{j+1}}{dt} - \frac{1}{f_j} \frac{df_j}{dt} + \frac{f_{j-1} f_{j+2}}{f_j f_{j+1}} = 1$$

これを整理すると (6.7) が得られる．

問 6.18 (i) $S = \phi$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$ なので

$$与式 = 0 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 = 12$$

(ii) $\{1, 2, \ldots, N\}$ の元それぞれを部分集合に含めるか含めないかを決めれば，1 つの部分集合 S が定まる．したがって部分集合は全部で 2^N 個ある．答：2^N

問 6.19 (i) $1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$　(ii) $1 + e + e^2 + 2e^3 + e^4 + e^5 + e^6$

問 6.20 (i) $(\ell, m) = (1,2)$, $(1,4)$, $(2,4)$ の組合せがある．ゆえに $1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 14$
(ii) $S = \phi$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ のとき exp の値は $e^0 = 1$．$\{1,2\}$, $\{2,3\}$ のとき e，$\{1,3\}$ のとき e^2，$\{1,2,3\}$ のとき e^4．答：$4 + 2e + e^2 + e^4$

問 6.21 $N=1$ の場合

$$f_j = 1 + e^{k_1 j - 2\sinh k_1 t + c_1}$$

$N=2$ の場合

$$f_j = 1 + e^{k_1 j - 2\sinh k_1 t + c_1} + e^{k_2 j - 2\sinh k_2 t + c_2} + \frac{\sinh^2 \frac{k_1 - k_2}{2}}{\sinh^2 \frac{k_1 + k_2}{2}} e^{(k_1+k_2)j - 2(\sinh k_1 + \sinh k_2)t + c_1 + c_2}$$

問 6.22 (i) $\omega_1 = 2\sinh\log 2 = 3/2$ より

$$f_j(t) = 1 + 2^j e^{-\frac{3}{2}t}, \qquad u_j(t) = \frac{(1+2^{j-1}e^{-\frac{3}{2}t})(1+2^{j+2}e^{-\frac{3}{2}t})}{(1+2^j e^{-\frac{3}{2}t})(1+2^{j+1}e^{-\frac{3}{2}t})}$$

(ii) $u_j(t)$ については，分子 >0, 分母 >0 であり，

$$分子 - 分母 = \frac{3}{2} 2^j e^{-\frac{3}{2}} > 0$$

より 分子 $>$ 分母 なので $u_j(t) > 1$. また $|j| \to \infty$ の極限については，具体的に計算すれば $\lim_{|j|\to\infty} u_j(t) = 1$ となる．

(iii) まず $t=0$ のときを考える．

$$u_j(0) = \frac{1 + 2^{j-1} + 2^{j+2} + 2^{2j+1}}{1 + 2^j + 2^{j+1} + 2^{2j+1}} = \frac{1 + \frac{9}{2}\cdot 2^j + 2\cdot 2^{2j}}{1 + 3\cdot 2^j + 2\cdot 2^{2j}}$$

$du_j(0)/dj = 0$ とすると

$$\frac{du_j(0)}{dj} = \frac{3}{2}\log 2 \frac{2^j(1-2^{2j+1})}{(1+3\cdot 2^j + 2\cdot 2^{2j})^2} = 0$$

より $j = -1/2$. このとき $u_j(0)$ は最大値 $(11 - 6\sqrt{2})/2$ をとる．各 t における $u_j(t)$ のグラフは j 軸正方向へ一定速度 $\omega_1/k_1 = 3/(2\log 2)$ で進むので $u_j(t)$ は $j = 3t/(2\log 2) - 1/2$ のとき最大値 $(11 - 6\sqrt{2})/2$ をとる．

問 6.23 (6.10) の両辺を $f_j^n f_{j+1}^{n+1}$ で割ると

$$(1+\delta)\frac{f_j^{n+1} f_{j+1}^n}{f_j^n f_{j+1}^{n+1}} = 1 + \delta \frac{f_{j-1}^n f_{j+2}^{n+1}}{f_j^n f_{j+1}^{n+1}}$$

右辺は (6.11) より $1 + \delta u_j^n$. したがって

$$\frac{1+\delta u_{j-1}^n}{1+\delta u_{j+1}^{n+1}} = \frac{f_{j-1}^{n+1} f_j^n f_{j+1}^{n+1} f_{j+2}^{n+2}}{f_{j-1}^n f_j^{n+1} f_{j+1}^{n+2} f_{j+2}^{n+1}} = \frac{u_j^{n+1}}{u_j^n}$$

となり，(6.12) が得られる．

問 6.24 (6.10) より

$$(1+\delta)f_j^{n+1}f_{j+1}^n - f_j^n f_{j+1}^{n+1} - \delta f_{j-1}^n f_{j+2}^{n+1} = 0$$

$N=1$ のとき $f_j^n = 1+e^{\xi_1}$ をこの式の左辺に代入すると次式を得る．

$$\begin{aligned}&(1+\delta)(1+e^{\xi_1-\omega_1})(1+e^{\xi_1+k_1}) - (1+e^{\xi_1})(1+e^{\xi_1+k_1-\omega_1})\\ &\qquad -\delta(1+e^{\xi_1-k_1})(1+e^{\xi_1+2k_1-\omega_1})\\ &=(1-e^{k_1})\{(1+\delta(1+e^{k_1}))e^{-\omega_1} - (1+\delta(1+e^{-k_1}))\}e^{\xi_1}\end{aligned}$$

(6.14) の ω_m と k_m の関係式より，上式の値が 0 になることがわかる．

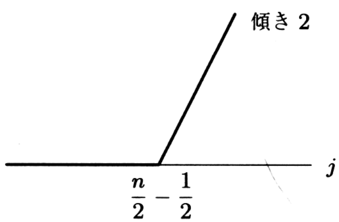
問 6.25

$$\begin{aligned}&U_j^{n+1} - U_j^n\\ &=F_{j-1}^{n+1} + F_{j+2}^{n+2} - F_j^{n+1} - F_{j+1}^{n+2} - F_{j-1}^n - F_{j+2}^{n+1} + F_j^n + F_{j+1}^{n+1}\\ &=(F_{j-1}^{n+1} + F_j^n) - F_{j-1}^n - F_j^{n+1} - (F_{j+1}^{n+2} + F_{j+2}^{n+1}) + F_{j+1}^{n+1} + F_{j+2}^{n+2}\\ &=\max(F_{j-1}^n + F_j^{n+1},\ F_{j-2}^n + F_{j+1}^{n+1} - 1) - F_{j-1}^n - F_j^{n+1}\\ &\qquad - \max(F_{j+1}^{n+1} + F_{j+2}^{n+2},\ F_j^{n+1} + F_{j+3}^{n+2} - 1) + F_{j+1}^{n+1} + F_{j+2}^{n+2}\\ &=\max(0,\ F_{j-2}^n + F_{j+1}^{n+1} - F_{j-1}^n - F_j^{n+1} - 1)\\ &\qquad - \max(0,\ F_j^{n+1} + F_{j+3}^{n+2} - F_{j+1}^{n+1} - F_{j+2}^{n+2} - 1)\\ &=\max(0,\ U_{j-1}^n - 1) - \max(0,\ U_{j+1}^{n+1} - 1)\end{aligned}$$

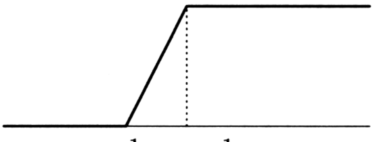
問 6.26 $K_1 = 2$ より $\Omega_1 = 1$．ゆえに

$$\begin{aligned}F_j^n &= \max(0,\ 2j-n+1),\\ U_j^n &= \max(0,2j-n-1) + \max(0,2j-n+4)\\ &\qquad - \max(0,2j-n+1) - \max(0,2j-n+2)\end{aligned}$$

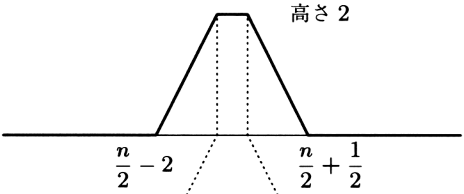
F_j^n のグラフは以下の形をしている．



したがって $V_j^n = F_j^n - F_{j-1}^n$ とすると V_j^n のグラフは以下の形をしている．



さらに $U_j^n = V_{j+3/2}^n - V_j^n$ なので U_j^n のグラフは以下のようになる．



問 6.27 $\Omega_1 = 0,\ \Omega_2 = 1,\ A_{12} = -2$ より

$$\begin{aligned} F_j^n &= \max(0,\ j,\ 2j-n,\ 3j-n-2) \\ U_j^n &= \max(0,\ j-1,\ 2j-n-2,\ 3j-n-5) \\ &\quad + \max(0,\ j+2,\ 2j-n+3,\ 3j-n+3) \\ &\quad - \max(0,\ j,\ 2j-n,\ 3j-n-2) - \max(0,\ j+1,\ 2j-n+1,\ 3j-n) \end{aligned}$$

$n = 0$ のとき

$$\begin{aligned} U_j^0 = \max(0,\ j-1,\ 2j-2,\ 3j-5) + \max(0,\ j+2,\ 2j+3,\ 3j+3) \\ - \max(0,\ j,\ 2j,\ 3j-2) - \max(0,\ j+1,\ 2j+1,\ 3j) \end{aligned}$$

$j \leq -2$ のとき，すべての max の値が 0 になるので $U_j^0 = 0$．また $j \geq 3$ のとき

$$U_j^0 = (3j-5) + (3j+3) - (3j-2) - (3j) = 0$$

ゆえに $-1 \le j \le 2$ の範囲の j に対して U_j^0 の値を具体的に調べればよい．結局，以下の値の分布が得られる．

j	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$5\cdots$
U_j^0	$\cdots$	0	0	0	1	2	1	1	0	0	$0\cdots$

同様にして U_j^1, U_j^2 も以下のようになる．

j	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$5\cdots$
U_j^1	$\cdots$	0	0	0	1	1	2	1	0	0	$0\cdots$
U_j^2	$\cdots$	0	0	0	1	1	1	2	0	0	$0\cdots$

問 6.28 $N=1$ の場合の (6.20) より $F_j^n = \max(0,\, Kj - \Omega n + C)$ となる．(K_1 等の添え字の 1 を省略.) また，$\Omega = \max(0, K-1) - \max(0, -K-1)$ であり，$Kj - \Omega n + C = \eta$ とおく．

$$\begin{aligned}
&(6.18)\ \text{左辺} + \max(0, K-1)\\
&\quad = \max(0, \eta - \Omega) + \max(0, \eta + K) + \max(0, K-1)\\
&\quad = \max(0,\ \eta - \Omega,\ \eta + K,\ 2\eta + K - \Omega) + \max(0, K-1)\\
&\quad = \max(0,\ K-1,\ \eta,\ \eta - K - 1,\ \eta + K,\ \eta + 2K - 1,\ 2\eta + K,\ 2\eta - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(6.18)\ \text{右辺} + \max(0, K-1)\\
&\quad = \max(\max(0,\eta) + \max(0, \eta + K - \Omega),\\
&\qquad\qquad \max(0, \eta - K) + \max(0, \eta + 2K - \Omega) - 1) + \max(0, K-1)\\
&\quad = \max(0,\ \eta,\ \eta + K - \Omega,\ 2\eta + K - \Omega,\ -1,\ \eta - K - 1,\\
&\qquad\qquad \eta + 2K - \Omega - 1,\ 2\eta + K - \Omega - 1) + \max(0, K-1)\\
&\quad = \max(0,\ \eta,\ \eta - K - 1,\ \eta + K - \Omega,\ \eta + 2K - \Omega - 1,\ 2\eta + K - \Omega)\\
&\qquad\qquad + \max(0, K-1)\\
&\quad = \max(0,\ K-1,\ \eta,\ \eta + K - 1,\ \eta - K - 1,\ \eta - 2,\ \eta + K,\ \eta - 1,\\
&\qquad\qquad \eta + 2K - 1,\ \eta + K - 2,\ 2\eta + K,\ 2\eta - 1)\\
&\quad = \max(0,\ K-1,\ \eta,\ \eta - K - 1,\ \eta + K,\ \eta + 2K - 1,\ 2\eta + K,\ 2\eta - 1)
\end{aligned}$$

したがって (6.18) が成り立つ．

問 6.29 S_j^n は，時刻 n で j 番目の箱から左にあるすべての玉の個数を数えればよい（0 を．

で表す）.

```
n = −2 | ...1233333334444444444444444
    −1 | ......1233333444444444444444
     0 | .........1233344444444444444
     1 | ............1223444444444444
     2 | ..............11123444444444
     3 | ...............1111123444444
     4 | ................111111123444
```

問 6.30 問 6.29 の S_j^n の分布を用いて $V_j^n = S_{j+1}^n - S_j^{n+1}$ を計算する（0 を . で表す）.

```
n = −2 | ..123321...11..............
    −1 | .....123321.11.............
     0 | ........12332221...........
     1 | ...........12223321........
     2 | .............11.123321.....
     3 | ..............11...123321..
```

問 6.31 $U_{j-n}^j = V_j^n$ の関係から以下のようになる（0 を . で表す）. ただし以下の図では問 6.30 の解答の j, n の範囲の一部を削ったり，範囲外の部分を補ったりしている.

```
             j →
    .....22....11..........
    ......31...11..........
    ......13...11..........
    .......22..11..........
    ........31.11..........
    ........13.11..........
n   .........2211..........
↓   .........1221..........
    .........1122..........
    .........11.31.........
    .........11.13.........
    .........11..22........
    .........11...31.......
    .........11...13.......
    .........11....22......
    .........11.....31.....
```

問 6.32 K_1, Ω_1, C_1 の添え字 1 を省略する. $K \geq 1$ なので $\Omega = \max(0, K-1) - \max(0, -K-1) = K-1$. ゆえに $F_j^n = \max(0,\, Kj - (K-1)n + C)$. これを (6.29) に代入する.

$$
\begin{aligned}
B_j^n = {} & \max(0,\, j - Kn + K + C) + \max(0,\, j - Kn - 1 + C) \\
& - \max(0,\, j - Kn + K - 1 + C) - \max(0,\, j - Kn + C)
\end{aligned}
$$

$W_j^n = \max(0,\, j - Kn + C) - \max(0,\, j - Kn - 1 + C)$ とすると

$$
W_j^n = \begin{cases} 0 & (j \leq Kn - C) \\ 1 & (j \geq Kn - C + 1) \end{cases}
$$

$B_j^n = W_{j+K}^n - W_j^n$ より

$$B_j^n = \begin{cases} 0 & (j \leq Kn - C - K \text{ か } j \geq Kn - C + 1) \\ 1 & (Kn - C - K + 1 \leq j \leq Kn - C) \end{cases}$$

したがって K 個の連続する 1 が j 軸正方向へ速さ K で移動する．

問 6.33 時刻 n で j 番目の箱に p 個の玉があり，運搬人がその箱を通る直前に r 個の玉を持っていたとする．その箱を通った直後には，箱の中の玉の数（すなわち次の時刻での数）は $p' = \min(r, L_j - p)$ となり，運搬人の手持ちの玉の数は $r' = p + r - p'$ となる．

一方，

$$\begin{aligned} &\min(r', L_j - p') \\ &\quad = \min(p + r - \min(r, L_j - p),\ L_j - \min(r, L_j - p)) \\ &\quad = \min(p + r, L_j) - \min(r, L_j - p) = \min(r, L_j - p) + p - \min(r, L_j - p) \\ &\quad = p, \\ &p' + r' - p = r \end{aligned}$$

となる．つまり，p, r から p', r' を決める式は p と p'，r と r' を入れ替えても成立する．したがって運搬人の進む方向を逆（$-j$ 方向）にして同じように玉の運搬をすれば，時間を逆にたどることができる．

問 6.34 以下の図では 0 を . で表す．

(i)

```
..332..........
....1331.......
.......233.....
..........332..
```

1 ソリトンとなる．

(ii)

```
..3331......1...............
.....2332....1..............
........1333..1.............
............3323............
..............1.3331........
...............1...2332.....
................1.....1333..
```

2 ソリトンが出現する．

(iii)

```
..3331.........13..2............................
.....2332........31.2...........................
........1333......22.2..........................
............3331...13.2.........................
...............2332..312........................
..................133.2133......................
.....................312..3331..................
......................213....2332...............
.......................2.31.....1333............
........................2.22........3331........
.........................2.13..........2332.....
..........................2..31...........1333..
```

3 ソリトンが出現する．

問 6.35 番号 m の玉を移動するときには，他の番号の玉は動かない．またそのとき，番号 m の玉は他の番号の玉が入っていない空き箱に移動する．ということは，他の番号の玉およびそれが入っている箱を無視すれば，番号 m の玉の移動ルールは元の（番号なしの）箱玉系のそれと同じである．したがって番号 m の玉の移動過程を逆にたどるには，元の箱玉系と同様にルールの左右方向（$\pm j$ 方向）を入れ替えればよい．また，この拡張系では小さい番号の玉から移動するので，大きい番号の玉から上記に示した逆過程を行えば，時間を逆にたどることができる．

以上をまとめると，大きい番号の玉から順に，運搬人が右から左へ移動して該当する番号の玉を取り出して空き箱に入れるという操作を行えば，時間を逆にたどることができる．

問 6.36 以下の図では 0 を . で表す．

(i)

```
..1234......
......1234..
```

1 ソリトンとなる．

(ii)

```
..124...3.........
.....124.3........
........1423......
..........4.123...
...........4...123
```

2 ソリトンが出現する．

(iii)

```
..1224...133....2....................
......1224..133..2...................
..........1224.1332..................
..............124.31223..............
.................1423..1223..........
...................4.123...1223......
....................4...123....1223..
```

3 ソリトンが出現する．

問 6.37 時刻 n で j 番目の箱の玉の数を p とし，運搬人がその箱を通る直前に r 個の玉を持っていたとする．その箱を通った直後には，箱の中の玉の数（すなわち次の時刻での数）p' は

$$p' = p + \min(1-p, r) - \min(p, M-r)$$

となる．すなわち，$p = 0$（空箱）のとき $p' = \min(1, r)$ なので運搬人に玉があればその玉が入り，$p = 1$（箱に玉が入っている）のとき $p' = 1 - \min(1, M-r)$ なので運搬人がまだ玉を手に持てる（$r < M$）ならばその玉を取る．また，箱を通った直後の運搬人の手持ちの玉の数は $r' = p + r - p'$ となる．

一方，

$$\begin{aligned}
&p' + \min(1-p', r') - \min(p', M-r') \\
&\quad = p' + \min(1-p', p+r-p') - \min(p', M-p-r+p') \\
&\quad = 2p - p' + \min(1-p, r) - \min(p, M-r) \\
&\quad = p
\end{aligned}$$

となり

$$r' = p' + r' - p$$

となるので，p, r から p', r' を決める式は p と p'，r と r' を入れ替えても成立する．したがってこの拡張系で時間をさかのぼるには，ルールの左右方向（$\pm j$ 方向）を入れ替えればよい．

問 6.38 以下の図では 0 を . で表す．

(i)

```
..1111.....
.....1111..
```

1 ソリトンとなる．

(ii)

```
..1111...1............
.....1111.1...........
........11.111........
..........1..1111.....
...........1....1111..
```

2 ソリトンが出現する．

(iii)

```
..11111...11.....1.....................
.....11111..11....1....................
........1111..111..1...................
...........111..111.11.................
..............11..11.1111..............
................11..1..11111...........
..................11.1....11111........
....................1.11.....11111.....
.....................1..11......11111..
```

3 ソリトンが出現する．

第 7 章

問 7.1 F_{ji}^n が (7.1) の解であることを示す．まず F_{ij}^n については (7.2) が任意の i, j で成り立つので，i を j，j を i と書き換えると

$$F_{ji}^{n+1} = \max(F_{ji}^n, F_{j-1i}^n, F_{j+1i}^n, F_{ji-1}^n, F_{ji+1}^n, F_{ji}^{n-1}) - F_{ji}^{n-1}$$

となる．そこで $U_{ij}^n = F_{ji}^n$ を代入すると

$$U_{ij}^{n+1} = \max(U_{ij}^n, U_{ij-1}^n, U_{ij+1}^n, U_{i-1j}^n, U_{i+1j}^n, U_{ij}^{n-1}) - U_{ij}^{n-1}$$

が成立する．これは (7.1) と等価なので，F_{ji}^n は (7.1) の解である．他の場合も同様にして示すことができる．

問 7.2 たとえば任意の i, j に対して $U_{ij}^{n+1} = 0$, $U_{ij}^n = 1$ とすると (7.1) より

$$0 = \max(1, U_{ij}^{n-1}) - U_{ij}^{n-1} = \max(1 - U_{ij}^{n-1}, 0)$$

となる．したがって $U_{ij}^{n-1} \geq 1$ ならばいつでも条件を満たすので一意に定まらない．さらに，たとえば任意の i, j に対して $U_{ij}^{n+1} = -1$, $U_{ij}^n = 1$ の場合は

$$-1 = \max(1 - U_{ij}^{n-1}, 0)$$

となり，方程式を満たす U_{ij}^{n-1} が存在しない．

問 7.3

$$LV_{ij}^{n+1} = \max(LV_{ij}^n, LV_{i-1j}^n, LV_{i+1j}^n, LV_{ij-1}^n, LV_{ij+1}^n, LV_{ij}^{n-1}) - LV_{ij}^{n-1}$$

より

$$V_{ij}^{n+1} = \max(V_{ij}^n, V_{i-1j}^n, V_{i+1j}^n, V_{ij-1}^n, V_{ij+1}^n, V_{ij}^{n-1}) - V_{ij}^{n-1}$$

となる．すなわち V_{ij}^n の方程式は (7.1) と同じ形になる．異なるのは $0 \leq V_{ij}^n \leq 1$ を満たす点である．

問 7.4 $U_{ij}^{n-1} = 0$ のとき，(7.1) は $U_{ij}^n \geq 0$ より

$$U_{ij}^{n+1} = \max(U_{ij}^n, U_{i-1j}^n, U_{i+1j}^n, U_{ij-1}^n, U_{ij+1}^n)$$

となる．また $U_{ij}^{n-1} = 1$ のとき，$U_{ij}^n \leq 1$ より

$$U_{ij}^{n+1} = 0$$

となる．これらを考慮すると，(7.1) をたとえば次式で置き換えることができる．

$$U_{ij}^{n+1} = (U_{ij}^n \vee U_{i-1j}^n \vee U_{i+1j}^n \vee U_{ij-1}^n \vee U_{ij+1}^n) \wedge (\sim U_{ij}^{n-1})$$

ただし，答は 1 通りではない．

問 7.5 (i) U_{ij}^{n-1}, U_{ij}^{n} がともに i, j によらない定数ならば，(7.1) 右辺が i, j によらないので U_{ij}^{n+1} も i, j によらない定数となる．すると，U_{ij}^{0}, U_{ij}^{1} が定数なので数学的帰納法より任意の n で U_{ij}^{n} が定数となる．

(ii) $c_{n+1} = \max(c_n, c_{n-1}) - c_{n-1} = \max(0, c_n - c_{n-1})$

(iii) $c_{n-1} = c_n = 0$ のとき $c_{n+1} = 0$ となるので以降の時刻はすべて 0 となる．このことより

$c_0 = c_1 = 0$ の場合: $n \geq 0$ で $c_n = 0$

$c_0 = 0$, $c_1 = 1$ の場合: $c_2 = 1$, $c_3 = c_4 = 0$ より $n \geq 3$ で $c_n = 0$

$c_0 = 1$, $c_1 = 0$ の場合: $c_2 = 0$ より $n \geq 1$ で $c_n = 0$

$c_0 = c_1 = 1$ の場合: $c_2 = c_3 = 0$ より $n \geq 2$ で $c_n = 0$

問 7.6 図 7.2 の解の $n = 0$ での 0–1 パターンは，たとえば

$$U_{ij}^{0} = \max(0, i) - \max(0, i-1) - \max(0, i-2) + \max(0, i-3)$$

となる．このパターンは i 軸正方向に速さ 1 で移動するので

$$U_{ij}^{n} = \max(0, i-n) - \max(0, i-n-1) - \max(0, i-n-2) + \max(0, i-n-3)$$

となる．図 7.3 の解も同様にして

$$\begin{aligned} U_{ij}^{n} = &\max(0, i+j-n) - \max(0, i+j-n-1) \\ &- \max(0, i+j-n-2) + \max(0, i+j-n-3) \end{aligned}$$

問 7.7 7.1 節で U_{ij}^{n} が (7.1) の解ならば U_{-ij}^{n} も解になることが示されたので，初期パターンの左右を逆にする．すると以降のパターンもすべて左右が逆になり左巻きのものが得られる．

問 7.8 U_{ij}^{n} が 0 か 1 だけならば，時刻 n で 1 の値を持つ格子点とそれに隣接する 4 つの格子点は次の時刻 $n+1$ で値が 1 になり，それ以外は 0 のままとなる．

(i)

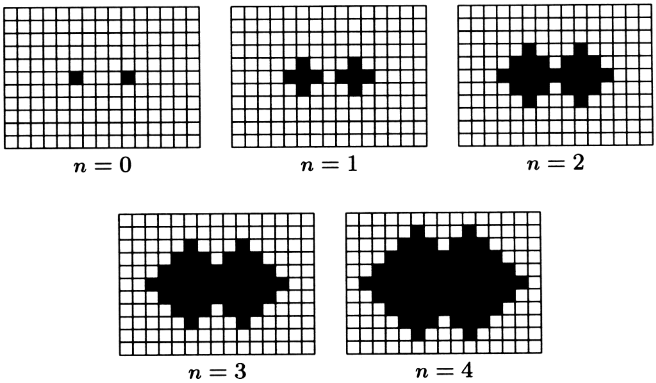
$$U_{ij}^{n} = \begin{cases} 1 & (-n \leq i \leq n) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

(ii)

$$U_{ij}^{n} = \begin{cases} 1 & (|i|,\ |j| \leq 3+n \text{ かつ } |i|+|j| \leq 6+n) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

(iii) 図 7.9 の中央の格子点を $(-2, 0)$ の位置にずらした場合の時間発展の図と $(2, 0)$ にずらした場合の時間発展の図を考える．両図を重ね，少なくともどちらか一方が黒色 $(= 1)$ となっている格子点をすべて黒色にし，どちらも白色 $(= 0)$ の格子点を白色にすれば求め

る時間発展パターンになる．以下に $n \leq 4$ までのパターンを示す．



問 7.9 (i) (7.7) の両辺から F_{ij} を引くと次式が得られる．

$$F_{ij} = \max(0,\, F_{i-1j} - F_{ij},\, F_{i+1j} - F_{ij},\, F_{ij-1} - F_{ij},\, F_{ij+1} - F_{ij})$$

右辺が 0 以上なので $F_{ij} \geq 0$.
(ii) $F_{ij} = 0$ とすると次式が得られる．

$$0 = \max(0, F_{i-1j}, F_{i+1j}, F_{ij-1}, F_{ij+1})$$

したがって $F_{i\pm1j}$, $F_{ij\pm1} \leq 0$ となるが (i) より $F_{i\pm1j} = F_{ij\pm1} = 0$ となる．つまり，ある格子点で F が 0 なら隣接格子点はすべて 0 となる．するとそれら隣接格子点にさらに隣接する格子点も 0 であり，このことを繰り返せば全格子点で $F = 0$ となる．
(iii) たとえば 2^i, $2^{|i|}$, 2^j, $2^{|j|}$, 2^{i+j}, 2^{i-j} はすべて解である．

問 7.10 (i) $U_{ij}^n = F_i^n$ を (7.6) に代入すると

$$\begin{aligned} F_i^{n+1} &= \max(F_i^n, F_{i-1}^n, F_{i+1}^n, F_i^n, F_i^n, F_i^{n-1}) - F_i^{n-1} \\ &= \max(F_{i-1}^n, F_i^n, F_{i+1}^n, F_i^{n-1}) - F_i^{n-1} \end{aligned}$$

となるので (7.8) が得られる．
さらに，$F_i^n = G_{i+n}$ を (7.8) に代入すると

$$\begin{aligned} G_{i+n-1} + G_{i+n+1} &= \max(G_{i+n-1}, G_{i+n}, G_{i+n+1}, G_{i+n-1}) \\ &= \max(G_{i+n-1}, G_{i+n}, G_{i+n+1}) \end{aligned}$$

となるので $i + n = k$ とおけば (7.9) が得られる．$F_i^n = G_{i-n}$ の場合も同様．
(7.9) の G は 0 か 1 の値しかとらない．したがって

$$G_{k-1} + G_{k+1} = \max(G_{k-1}, G_k, G_{k+1}) \leq 1$$

となる．$G_{k-1} = G_{k+1} = 0$ の場合は明らかに $G_k = 0$．G_{k-1} と G_{k+1} の一方が 0 で他方が 1 の場合，G_k は 0, 1 のどちらでもよい．したがって (7.10) が得られる．

(ii) G_k の値を並べた 0–1 パターンを考えると，まず孤立した 1 すなわち 010 や，3 つ連続する 1 すなわち 111 は (7.10) より存在し得ない．ということはもし 1 が存在するなら，それは 0110 というパターンでなければならない．そのパターンを 2 つ並べて 0110110 とすると，中央の 101 が (7.10) にないので許されない．したがって 11 は間に 2 つ以上の 0 をはさまなければならない．

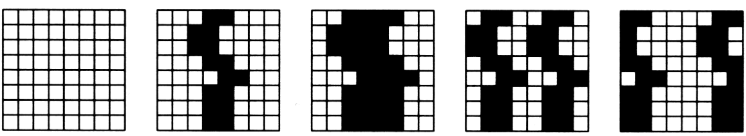
問 7.11　進行波ではないので (7.8) にあてはめて具体的に計算する（以下の図では 0 を . で表す）．

```
(i)   ......1......     (ii)  ..............
      ......1......           ......11......
      .....1.1.....           .....1111.....
      ....11.11....           ....11..11....
      ...11.1.11...           ...11....11...
      ..11..1..11..           ..11......11..
```

問 7.12　$F_m^n = G_{m\pm n}$ を仮定すると進行波解になる．それ以外の解を得るには (7.12) で進行波にならない初期値 F_m^0, F_m^1 を与えればよい．たとえば問 7.11 の (ii) の結果を利用して，$F_0^1 = F_1^1 = 1$ 以外は任意の m で $F_m^0 = F_m^1 = 0$ とする．すると $n \geq 2$ で

$$F_m^n = \begin{cases} 1 & (m = -n+1,\ -n+2,\ n-1,\ n) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

となる．このときの $n \leq 4$ までのパターンを次図に示す．



$n=0$　　$n=1$　　$n=2$　　$n=3$　　$n=4$

問 7.13　(7.13) に従うと，$m \geq 1$ の場合に F_{m-1}^n, F_m^n, F_{m+1}^n, F_m^{n-1} から F_m^{n+1} が次表のように定まる．

F_m^{n-1}	0	1	1	1	0	0	0
$F_{m-1}^n F_m^n F_{m+1}^n$	000	001	011	101	100	110	010
F_m^{n+1}	0	0	0	0	1	1	1

図 7.13 のパターンの $m \geq 1$ の部分はどこも上の表のどれかで構成されている．また，$m = 0$ の場合に F_0^n, F_1^n, F_0^{n-1} から F_0^{n+1} が次表のように定まる．

F_0^{n-1}	0	1	1	1	0	0
$F_0^n F_1^n$	00	01	10	11	10	01
F_0^{n+1}	0	0	0	0	1	1

図 7.13 のパターンの $m=0$ の部分はどこも上の表のどれかで構成されている．したがって解が確認できた．

問 7.14 以下の図では 0 を . で表す．

(i)

```
1...
....
....
....
```

すべてが 0 になる．

(ii)

```
1........
.1.......
.11......
1.11.....
1..11....
.1..11...
.11..11..
```

$m=0$ から繰り返し 11 の波が生まれる．

問 7.15 存在する．時計回りに回転する場合，時刻 n での m 番の曲線の値は $n+1$ での $m-1$ (mod 4) 番の曲線の値に等しい．ということは反時計回りのスパイラルパターンの解が $F_m^n = G_{m-n}$ $(m-n \bmod 4)$ の進行波解なので，その解 G_k を用いて $F_m^n = G_{m+n}$ $(m+n \bmod 4)$ とおけばそれが時計回りの解になる．

問 7.16 図 7.7 のダブルターゲットの座標曲線は次図の (a) となる．0 ～ 4 番までの曲線は 2 箇所に存在し，5 番以上の曲線はそれぞれ 1 本の閉じた曲線である．m 番目の曲線の時刻 n での値を F_m^n とすると，F_m^n について (7.13) と同じ式が成り立つ．

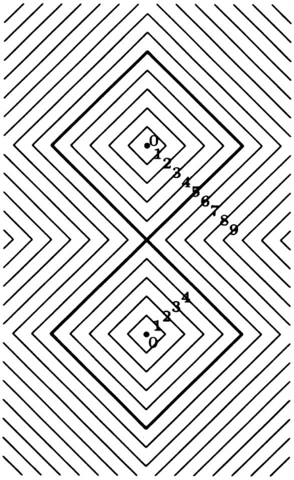
図 7.8 のダブルスパイラルの座標曲線は次図の (b) となる．0 ～ 3 番までは上下に両端を持つ曲線であり，4 番以上は 1 本の閉じた曲線である．F_m^n については次式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
F_0^{n+1} &= \max(F_3^n, F_0^n, F_1^n, F_0^{n-1}) - F_0^{n-1} \\
F_m^{n+1} &= \max(F_{m-1}^n, F_m^n, F_{m+1}^n, F_m^{n-1}) - F_m^{n-1} \qquad (m \geq 1 \text{ かつ } m \neq 3)
\end{aligned}
$$

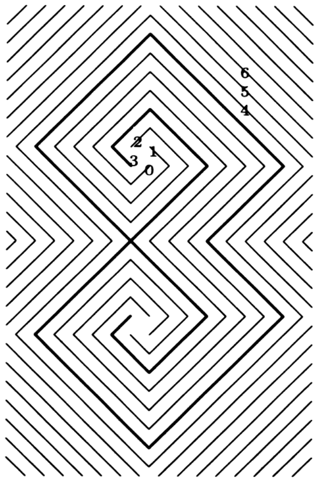
$m=3$ の方程式は特別で

$$
\begin{aligned}
F_3^{n+1} &= \max(F_2^n, F_3^n, F_0^n, F_3^{n-1}) - F_3^{n-1}, \\
F_3^{n+1} &= \max(F_2^n, F_3^n, F_4^n, F_3^{n-1}) - F_3^{n-1}, \\
F_3^{n+1} &= \max(F_2^n, F_3^n, F_0^n, F_4^n, F_3^{n-1}) - F_3^{n-1}
\end{aligned}
$$

が同時に成り立つ必要がある.



(a)



(b)

付録B

章末問題の答

第1章

[1.1] (i) 与式を $n=2$ の場合に計算する．まず最後の項が約分できるので後ろの方から2項ずつ計算していく．

$$\begin{aligned}
&\frac{a_3-a_0}{a_0-a_1}+\frac{(a_3-a_0)(a_3-a_1)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}+\frac{(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)}\\
&\quad=\frac{a_3-a_0}{a_0-a_1}+\frac{(a_3-a_0)(a_3-a_1)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}-\frac{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}\\
&\quad=\frac{a_3-a_0}{a_0-a_1}-\frac{a_3-a_1}{a_0-a_1}\\
&\quad=-1
\end{aligned}$$

答は -1.

(ii) 与式を $n=3$ の場合に計算する．(i) と同様に，まず最後の項が約分できるので後ろの方から2項ずつ計算していく．

$$\begin{aligned}
&\frac{a_4-a_0}{a_0-a_1}+\frac{(a_4-a_0)(a_4-a_1)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}+\frac{(a_4-a_0)(a_4-a_1)(a_4-a_2)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)}\\
&\qquad+\frac{(a_4-a_0)(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)(a_0-a_4)}\\
&=\frac{a_4-a_0}{a_0-a_1}+\frac{(a_4-a_0)(a_4-a_1)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}+\frac{(a_4-a_0)(a_4-a_1)(a_4-a_2)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)}\\
&\qquad-\frac{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{a_4 - a_0}{a_0 - a_1} + \frac{(a_4 - a_0)(a_4 - a_1)}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)} - \frac{(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)}$$
$$= \frac{a_4 - a_0}{a_0 - a_1} - \frac{a_4 - a_1}{a_0 - a_1} = -1$$

$n = 2, 3$ の場合をヒントにすると，一般の n の場合は与式をたとえば以下のように変形しておくと計算がしやすい．

$$与式 = \frac{a_{n+1} - a_0}{a_0 - a_1}\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_1}{a_0 - a_2}\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_2}{a_0 - a_3}\left(\cdots\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\cdots\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_{n-2}}{a_0 - a_{n-1}}\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{a_0 - a_n}\underline{\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_0 - a_{n+1}}\right)}\right)\right)\cdots\right)\right)\right)$$

この式を，最も内側の括弧すなわち下線を引いたところから順に計算すると，以下のようになる．

$$上式右辺 = \frac{a_{n+1} - a_0}{a_0 - a_1}\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_1}{a_0 - a_2}\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_2}{a_0 - a_3}\left(\cdots\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\cdots\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_{n-2}}{a_0 - a_{n-1}}\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{a_0 - a_n}\underline{\frac{a_0 - a_n}{a_0 - a_{n+1}}}\right)\right)\cdots\right)\right)\right)$$
$$= \frac{a_{n+1} - a_0}{a_0 - a_1}\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_1}{a_0 - a_2}\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_2}{a_0 - a_3}\left(\cdots\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\cdots\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_{n-2}}{a_0 - a_{n-1}}\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{a_0 - a_{n+1}}\right)\right)\cdots\right)\right)\right)$$
$$= \frac{a_{n+1} - a_0}{a_0 - a_1}\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_1}{a_0 - a_2}\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_2}{a_0 - a_3}\left(\cdots\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\cdots\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_{n-2}}{a_0 - a_{n-1}}\frac{a_0 - a_{n-1}}{a_0 - a_{n+1}}\right)\cdots\right)\right)\right)$$
$$= \frac{a_{n+1} - a_0}{a_0 - a_1}\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_1}{a_0 - a_2}\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_2}{a_0 - a_3}\left(\cdots\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\cdots\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_{n-2}}{a_0 - a_{n+1}}\right)\cdots\right)\right)\right)$$
$$\vdots$$
$$= \frac{a_{n+1} - a_0}{a_0 - a_1}\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_1}{a_0 - a_{n+1}}\right)$$
$$= \frac{a_{n+1} - a_0}{a_0 - a_1}\frac{a_0 - a_1}{a_0 - a_{n+1}}$$
$$= -1$$

したがって与式は n によらずに常に -1 である．

[1.2] (i) 与式を p^n について解くと

$$p^n = \frac{1}{b}\left(\frac{a}{x_n} - 1\right)$$

となる．したがって

$$x_{n+1}=\frac{a}{1+bp^{n+1}}=\frac{a}{1+p(\frac{a}{x_n}-1)}=\frac{ax_n}{(1-p)x_n+pa}$$

である．または

$$x_{n+1}=\frac{1}{p}x_n\Big(1-\frac{1}{a}(1-p)x_{n+1}\Big)$$

となる．これらが求める関係式である．
(ii) 与式を p^n について解くと

$$p^n=\frac{dx_n-b}{a-cx_n}$$

となる．したがって

$$x_{n+1}=\frac{ap^{n+1}+b}{cp^{n+1}+d}=\frac{ap\frac{dx_n-b}{a-cx_n}+b}{cp\frac{dx_n-b}{a-cx_n}+d}=\frac{(adp-bc)x_n+ab(1-p)}{cd(p-1)x_n+ad-bcp}$$

である．これが求める関係式である．

[1.3] $x_n=ka^{(1+b)^n}$ の対数をとり，

$$y_n=\log x_n$$

のように新しい変数を導入すると，y_n は

$$y_n=\log k+\log a(1+b)^n$$

と表される．この式より y_n は漸化式

$$y_{n+1}=(1+b)y_n-b\log k$$

を満たす．変数を x_n に戻すと

$$x_{n+1}=x_n^{1+b}k^{-b}\qquad\text{または}\qquad x_{n+1}=x_n\left(\frac{x_n}{k}\right)^b$$

となる．これがゴンペルツ曲線の差分方程式（漸化式）である．

注：ゴンペルツ曲線の差分化は佐藤大輔氏によって求められた [17].

[1.4] 与式

$$x_{n+1}-x_n=\frac{a}{b}x_n(b-x_{n+1})$$

を変換式 $x_n=\dfrac{1}{y_n}$ によって書き換え整理すると

$$\frac{1}{y_{n+1}}-(1+a)\frac{1}{y_n}+\frac{a}{b}\frac{1}{y_ny_{n+1}}=0$$

となり，

$$y_{n+1} = (1+a)^{-1} y_n + \frac{a}{b(1+a)}$$

となる．これはタイプ III の方程式であり，解は

$$\begin{aligned} y_n &= (1+a)^{-n} y_0 + \frac{1}{b}(1-(1+a)^{-n}) \\ &= \frac{1}{b} + \left(y_0 - \frac{1}{b}\right)(1+a)^{-n} \end{aligned}$$

と表される．y_0 を初期値 $\dfrac{1}{y_0} = x_0 = \dfrac{b}{1+m}$ より決定すると

$$x_n = \frac{b}{1+m(1+a)^{-n}}$$

となる．したがって空白は $m(1+a)^{-n}$ である．

[1.5] 与式 $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$ より

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 x_0 + b_0, \\ x_2 &= a_1 x_1 + b_1 = a_1(a_0 x_0 + b_0) + b_1 = a_1 a_0 x_0 + a_1 b_0 + b_1, \\ x_3 &= a_2 x_2 + b_2 = a_2(a_1 a_0 x_0 + a_1 b_0 + b_1) + b_2 \\ &= a_2 a_1 a_0 x_0 + a_2 a_1 b_0 + a_2 b_1 + b_2, \\ x_4 &= a_3 x_3 + b_3 = a_3(a_2 a_1 a_0 x_0 + a_2 a_1 b_0 + a_2 b_1 + b_2) + b_3 \\ &= a_3 a_2 a_1 a_0 x_0 + a_3 a_2 a_1 b_0 + a_3 a_2 b_1 + a_3 b_2 + b_3, \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

これらの式を観察して一般項は

$$x_n = \Big(\prod_{k=0}^{n-1} a_k\Big) x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\prod_{j=k+1}^{n-1} a_j\Big) b_k$$

と推定される．

この推定を確かめるために x_n を与式の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \Big(\prod_{k=0}^{n} a_k\Big) x_0 + \sum_{k=0}^{n} \Big(\prod_{j=k+1}^{n} a_j\Big) b_k \\ &= a_n \Big(\prod_{k=0}^{n-1} a_k\Big) x_0 + a_n \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\prod_{j=k+1}^{n-1} a_j\Big) b_k + b_n \\ &= a_n x_n + b_n \end{aligned}$$

となり，解であることが確かめられた．

[1.6] 与式より y_n $(= x_{n+1} - x_n)$ に対する差分方程式をつくると

$$y_{n+1} = 2y_n + 2$$

となる．初期値は

$$y_1 = x_2 - x_1 = 2x_1 + 2 - 2 = 0$$

である．この方程式を定数変化法で解く．$y_n = c_n 2^{n-1}$ とおいて方程式に代入すると c_n に対する方程式

$$c_{n+1} = c_n + 2^{-n+1}, \qquad c_1 = y_1 = 0$$

が得られる．解は

$$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k+1} = 2(1 - 2^{-n+1})$$

である．したがって

$$y_n = 2(1 - 2^{-n+1})2^{n-1} = 2^n - 2$$

である．

$y_n = x_{n+1} - x_n$ であるので x_n に対する差分方程式は

$$x_{n+1} - x_n = 2^n - 2, \qquad x_1 = 0$$

となる．この式の解として x_n は

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^k - 2) = 2^n - 2n$$

で与えられる．

解をチェックする．方程式 $x_{n+1} = 2x_n + 2n - 2$ に解を代入すると，左辺 $= 2^{n+1} - 2(n+1)$，右辺 $= 2(2^n - 2n) + 2n - 2 = 2^{n+1} - 2(n+1)$，そして初期値は $x_1 = 0$．ゆえに解は方程式と初期値を満たしている．

注：和公式

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

を a で微分して得られる次の公式

$$\sum_{k=0}^{n-1} k a^{k-1} = \frac{(n-1)a^n - na^{n-1} + 1}{(1-a)^2} \qquad (a \neq 1)$$

を知っていると 1 階線形非同次方程式の解の表示が使えるが，この公式は知らないと仮定した．

[1.7] 与式は書き換えると

$$(n+1)(x_{n+2} - 2x_{n+1}) - n(x_{n+1} - 2x_n) = 1$$

となるので，$y_n = n(x_{n+1} - 2x_n)$ とおくと y_n は次の 1 階差分方程式を満たす．

$$y_{n+1} - y_n = 1, \qquad y_1 = x_2 - 2x_1 = 1$$

解は $y_n = n$ で与えられる．この結果，変換式 $y_n = n(x_{n+1} - 2x_n)$ は x_n に対する 1 階差分方程式

$$n(x_{n+1} - 2x_n) = n$$

または

$$x_{n+1} - 2x_n = 1$$

を与える．定数変化法によりこの式に解 $x_n = c_n 2^{n-1}$ を代入すると c_n に対する方程式

$$c_{n+1} - c_n = 2^{-n}$$

が得られる．解は

$$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k} = c_1 + 1 - 2^{-n+1}$$

となる．x_n は

$$x_n = (c_1 + 1 - 2^{-n+1})2^{n-1}$$

と表される．初期値 $x_1 = 1$ より $c_1 = 1$ である．したがって解は最終的に

$$x_n = 2^n - 1$$

となる．

[1.8]　カソラチ行列式 $C[f,g,h]_{n+1}$ を計算する．

$$C[f,g,h]_{n+1} = \det \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_{n+2} & f_{n+3} \\ g_{n+1} & g_{n+2} & g_{n+3} \\ h_{n+1} & h_{n+2} & h_{n+3} \end{pmatrix}$$

f_{n+2}，g_{n+2}，h_{n+2} は差分方程式 $x_{n+3} + p_n x_{n+2} + q_n x_{n+1} + r_n x_n = 0$ の解であるので代入すると

$$\begin{aligned} \text{上式右辺} &= \det \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_{n+2} & -p_n f_{n+2} - q_n f_{n+1} - r_n f_n \\ g_{n+1} & g_{n+2} & -p_n g_{n+2} - q_n g_{n+1} - r_n g_n \\ h_{n+1} & h_{n+2} & -p_n h_{n+2} - q_n h_{n+1} - r_n h_n \end{pmatrix} \\ &= -r_n \det \begin{pmatrix} f_n & f_{n+1} & f_{n+2} \\ g_n & g_{n+1} & g_{n+2} \\ h_n & h_{n+1} & h_{n+2} \end{pmatrix} = -r_n C[f,g,h]_n \end{aligned}$$

となる．ゆえに $C[f,g,h]_n$ が定数になるための条件は $r_n = -1$ である．

[1.9] 与えられた差分方程式は次の 2 通りに書き直せる

$$x_{n+1} = 2\cos k\, x_n - x_{n-1},$$
$$x_{n-1} = 2\cos k\, x_n - x_{n+1}$$

この 2 式は n が増加する方向にも減少する方向にも解が一意的に決定されることを保証している．したがって 2 つの解 f_n, g_n が同じ初期条件を満たせば（たとえば x_0, x_{-1} で同じ初期条件を満たせば），解の一意性によってすべての整数 n で $f_n = g_n$ である．f_n, g_n を次のように選ぶ．

$$f_n = s(k(m+n)),$$
$$g_n = s(km)c(kn) + c(km)s(kn)$$

最初は $m = 1$ の場合について考える．関数 c, s の基本的性質より，$n = 0$ で

$$f_0 = s(k), \qquad g_0 = s(k)c(0) + c(k)s(0) = s(k)$$

となり，$n = -1$ で

$$f_{-1} = s(0) = 0, \qquad g_{-1} = s(k)c(-k) + c(k)s(-k) = 0$$

となるので，f_n と g_n は同じ初期値を共有している．したがって任意の整数 n で $m = 1$ の場合の加法定理

$$s(k(n+1)) = s(kn)c(k) + c(kn)s(k) \qquad (ア)$$

が成り立つ．

次に m が任意の整数の場合を考える．関数 c, s の基本的性質より，$n = 0$ で

$$f_0 = s(km), \qquad g_0 = s(km)c(0) + c(km)s(0) = s(km)$$

となり，$n = 1$ で

$$f_1 = s(k(m+1)), \qquad g_1 = s(km)c(k) + c(km)s(k)$$

となる．(ア) より $f_1 = g_1$ であり，$n = 0, 1$ で同じ初期値を共有している．したがって任意の整数 n で

$$s(k(m+n)) = s(km)c(kn) + c(km)s(kn)$$

となる．

[1.10] 与式

$$x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = \frac{3}{n(n+3)}, \qquad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{6}$$

より

$$x_3 = -x_2 - x_1 + \frac{3}{4} = \frac{-6-2+9}{12} = \frac{1}{3\cdot 4}$$
$$x_4 = -x_3 - x_2 + \frac{3}{2\cdot 5} = \frac{-10-20+36}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{4\cdot 5}$$
$$\vdots$$

となるので $x_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ が予想される．

解をチェックする．解を方程式に代入すると左辺

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{n(n+1)}$$
$$= \frac{n(n+1)+n(n+3)+(n+2)(n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3}{n(n+3)}$$

となる．そして初期値は $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{6}$. ゆえに解は方程式と初期値を満たしている．

[1.11] 与式

$$x_{n+2} - (n+3)x_{n+1} + (n+1)x_n = 1$$

を書き直すと

$$(x_{n+2} - (n+2)x_{n+1}) - (x_{n+1} - (n+1)x_n) = 1$$

となるので，新しい変数 $y_n = x_{n+1} - (n+1)x_n$ を導入すると

$$y_{n+1} - y_n = 1 \qquad (\text{初期値は } y_1 = x_2 - 2x_1 = 1)$$

となる．この方程式の解は $y_n = n$ である．したがって x_n は変数変換 $y_n = x_{n+1} - (n+1)x_n$ より

$$x_{n+1} - (n+1)x_n = n \qquad (\text{初期値は } x_1 = 0)$$

を満たす．

そこで定数変化法を使う．同次方程式の解 $x_n = c\cdot n!$ より $x_n = c_n n!$ とおく．これを上式に代入すると c_n に対する方程式

$$c_{n+1} - c_n = \frac{n}{(n+1)!} \qquad (\text{初期値は } c_1 = x_1 = 0)$$

が得られる．解は

$$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{n!}$$

となる．したがって $x_n = c_n n!$ より

$$x_n = c_n n! = n! - 1$$

となる．これが求める解である．

解をチェックする．解を方程式に代入すると

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= x_{n+2} - (n+3)x_{n+1} + (n+1)x_n \\ &= (n+2)! - 1 - (n+3)((n+1)! - 1) + (n+1)(n! - 1) = 1\end{aligned}$$

となる．そして初期値は $x_1 = 1! - 1 = 0$, $x_2 = 2! - 1 = 1$．ゆえに解は方程式と初期値を満たしている．

[1.12] (i)

$$u_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{ax_n + by_n}{cx_n + dy_n}$$

となる．最右辺の分母・分子を y_n で割ると

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

が得られる．

(ii) $u_n = x_n/y_n$ とおくと与式より

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{3x_n/y_n + 2}{x_n/y_n + 4} = \frac{3x_n + 2y_n}{x_n + 4y_n}$$

分子と分母をそれぞれ等しいとすると連立差分方程式

$$x_{n+1} = 3x_n + 2y_n \qquad (ア)$$

$$y_{n+1} = x_n + 4y_n \qquad (イ)$$

を得る．(ア) より

$$y_n = \frac{1}{2}(x_{n+1} - 3x_n) \qquad (ウ)$$

となる．これを (イ) に代入して x_n に対する差分方程式

$$x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 0$$

を得る．解は

$$x_n = c_1 5^n + c_2 2^n$$

となる．(ウ) より

$$y_n = \frac{1}{2}\left(c_1 5^{n+1} + c_2 2^{n+1} - 3(c_1 5^n + c_2 2^n)\right) = c_1 5^n - c_2 2^{n-1}$$

となる．したがって解は

$$u_n = \frac{x_n}{y_n} = \frac{c_1 5^n + c_2 2^n}{c_1 5^n - c_2 2^{n-1}} = \frac{1 + \frac{c_2}{c_1}\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}\frac{c_2}{c_1}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

となる．初期値 $u_0 = 4$ より $\dfrac{c_2}{c_1} = 1$ を得る．したがって

$$u_n = \frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

となる．

[1.13] 与式

$$n(n+1)x_{n+2} - n(2n+1)x_{n+1} + (n^2-1)x_n = 0 \qquad (n \geq 2)$$

に $x_{1,n} = n$ を代入すると

$$\begin{aligned} &n(n+1)(n+2) - n(2n+1)(n+1) + (n^2-1)n \\ &= n(n+1)(n+2-(2n+1)+n-1) = 0 \end{aligned} \qquad (ア)$$

となり，$x_{1,n} = n$ が同次方程式の 1 つの解であることが確かめられる．定数変化法によりもう 1 つの解を $x_{2,n} = nc_n$ とおき与式に代入すると

$$n(n+1)(n+2)c_{n+2} - n(2n+1)(n+1)c_{n+1} + (n^2-1)nc_n = 0$$

である．(ア) に c_{n+1} を掛けたもの，すなわち

$$c_{n+1}[n(n+1)(n+2) - n(2n+1)(n+1) + (n^2-1)n] = 0$$

を上式から引くと

$$n(n+1)(n+2)(c_{n+2} - c_{n+1}) - (n^2-1)n(c_{n+1} - c_n) = 0$$

となる．新しい変数 $y_n = c_{n+1} - c_n$ を導入すると

$$n(n+1)(n+2)y_{n+1} = (n-1)n(n+1)y_n$$

または

$$y_{n+1} = \frac{(n-1)n(n+1)}{n(n+1)(n+2)}y_n$$

が得られる．解は

$$y_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(n-1)n(n+1)}y_2$$

である．変数変換 $y_n = c_{n+1} - c_n$ より

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(n-1)n(n+1)}y_2$$

である．さらに，

$$-2\frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

が成り立つことに注意すると，b_0 を任意定数として

$$c_n = -\frac{3y_2}{(n-1)n} + b_0$$

が得られる．$x_{2,n} = nc_n$ より

$$x_{2,n} = b_0 n - \frac{3y_2}{n-1}$$

となる．$x_{1,n} = n$ は同次方程式の解であるので上式より n に比例する項 $b_0 n$ を無視すると，独立なもう 1 つの解が $x_{2,n} = \dfrac{1}{n-1}$ であることがわかる．カソラチ行列式を計算すると

$$C[x_1, x_2]_n = \det\begin{pmatrix} n & n+1 \\ \dfrac{1}{n-1} & \dfrac{1}{n} \end{pmatrix} = -\frac{2}{n-1}$$

となるので $x_{1,n} = n$, $x_{2,n} = \dfrac{1}{n-1}$ が $n \geq 2$ のとき基本解であることが確かめられる．

したがって同次方程式の一般解は

$$x_n = \hat{c}_1 n + \hat{c}_2\frac{1}{n-1}$$

となる．初期値 $x_2 = 2$, $x_3 = 2$ より $\hat{c}_1 = \dfrac{1}{2}$, $\hat{c}_2 = 1$ と定まる．求める解は

$$x_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{n-1}$$

である．

[1.14] 与式

$$n(n+1)x_{n+2} - n(2n+1)x_{n+1} + (n^2-1)x_n = 3n(n+1) \qquad (n \geq 2)$$

を $n(n+1)$ で割ると

$$x_{n+2} - \frac{2n+1}{n+1}x_{n+1} + \frac{n-1}{n}x_n = 3$$

である．この式の特殊解 z_n を前問の同次方程式の基本解 $x_{1,n}$, $x_{2,n}$ を使って

$$z_n = c_{1,n}x_{1,n} + c_{2,n}x_{2,n}$$

と表すと，(1.68) より $c_{1,n}$, $c_{2,n}$ は次の差分方程式の解として求まる．

$$c_{1,n+1} - c_{1,n} = -\frac{r_n x_{2,n+1}}{C[x_1, x_2]_{n+1}},$$
$$c_{2,n+1} - c_{2,n} = \frac{r_n x_{1,n+1}}{C[x_1, x_2]_{n+1}}$$

ここで $r_n = 3$ であり，前問により

$$C[x_1, x_2]_n = -\frac{2}{n-1}$$

であるので，上の差分方程式は

$$c_{1,n+1} - c_{1,n} = \frac{3}{2},$$
$$c_{2,n+1} - c_{2,n} = -\frac{3}{2}n(n+1)$$

となり，解は α, β を任意定数として

$$c_{1,n} = \frac{3}{2}n + \alpha,$$
$$c_{2,n} = -\frac{1}{2}n(n^2-1) + \beta$$

となるので特殊解 z_n は

$$z_n = \left(\frac{3}{2}n + \alpha\right)n + \left(-\frac{1}{2}n(n^2-1) + \beta\right)\frac{1}{n-1}$$

と表される．αn, $\dfrac{\beta}{n-1}$ の項は同次方程式の解なので $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = 0$ と選ぶと特殊解の表現が簡単になり

$$z_n = n^2$$

となる．したがって一般解 x_n は任意定数 a, b を使って

$$x_n = an + \frac{b}{n-1} + n^2$$

と表される．初期値 $x_2 = 2$, $x_3 = 7$ より $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = -1$ と定まる．求めている解は

$$x_n = -\frac{1}{2}n - \frac{1}{n-1} + n^2$$

である．

第4章

[4.1] (i) $x + \max(0, -x) = \max(x, 0)$

(ii) $x \geq 0$ なら 右辺 $= x$, $x < 0$ なら 右辺 $= -x$

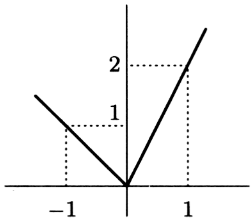
(iii) $2\max(0, x) = \max(0, x) + \max(0, x) = \max(\max(0, x), x + \max(0, x)) = \max(0, x, 2x)$

[4.2] (i) $x \geq y$ なら 左辺 = 右辺 $= x$, $x < y$ なら 左辺 = 右辺 $= y$

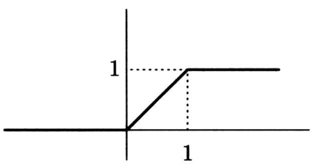
(ii) $x \geq y$ として一般性を失わない．このとき 左辺 $= \max(y, z)$．また $\max(x, z) \geq \max(y, z)$ より 右辺 $= \max(y, z)$

(iii) (ii) と同様 $x \geq y$ とする．このとき 左辺 $= \min(x, z)$．また $\min(x, z) \geq \min(y, z)$ より 右辺 $= \min(x, z)$

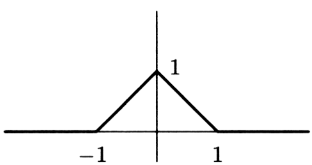
[4.3] (i)



(ii) $x \leq 0$ で $f(x) = 0$, $0 < x \leq 1$ で $f(x) = x$, $1 < x$ で $f(x) = 1$.



(iii) $x \leq -1$ で $f(x) = 0$, $-1 < x \leq 0$ で $f(x) = x + 1$, $0 < x \leq 1$ で $f(x) = 1 - x$, $1 < x$ で $f(x) = 0$.



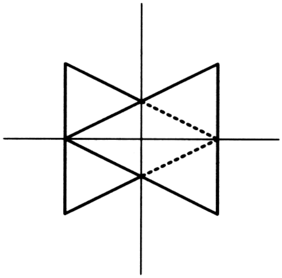
[4.4] (i) 内部領域を表す連立不等式は

$$y \leq 1, \qquad -2x - 1 \leq y, \qquad x - 1 \leq y$$

なので $y,\ -2x-y,\ x-y$ がすべて 1 以下となる．したがって周囲の多角形は

$$\max(y, -2x-y, x-y) = 1$$

(ii) 内部領域を図のように 2 つの三角形領域の和として考える．



それぞれの領域は

$$\max\left(-x-2,\ \frac{x}{2}+y-1,\ \frac{x}{2}-y-1\right) \le 0$$
$$\max\left(x-2,\ -\frac{x}{2}+y-1,\ -\frac{x}{2}-y-1\right) \le 0$$

と表せるので，元の領域の周囲の多角形は次式で与えられる．

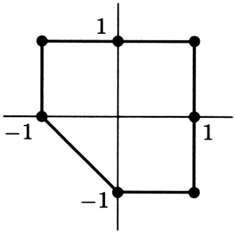
$$\min\Biggl(\max\left(-x-2,\ \frac{x}{2}+y-1,\ \frac{x}{2}-y-1\right),\ \max\left(x-2,\ -\frac{x}{2}+y-1,\ -\frac{x}{2}-y-1\right)\Biggr) = 0$$

[4.5] (i) 式に代入して順に計算する．

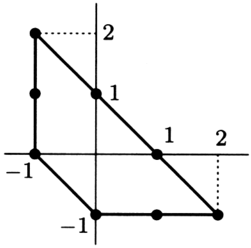
$$\text{(a)}\quad X_n\ :\ 1,\ 0,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots$$
$$\text{(b)}\quad X_n\ :\ 1,\ 0,\ -1,\ 2,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 1,\ 0,\ \ldots$$

(a) は周期 7，(b) は周期 8 の周期解となる．

(ii) (i) で得られた解を相平面にプロットし，隣り合う点を線分でつなぐと次図のようになる．



(a)



(b)

隣り合う点を結んでできる線分は，それぞれ上半平面あるいは下半平面にその全体が含まれているので，線形写像によって別の線分に写像される．したがって (a), (b) の多角形上の任意の点を初期値とする解の周期は常に一定.

さらに X_n が方程式の解なら，その正の定数倍 CX_n も解となる．したがって原点を中心に正の任意倍だけ拡大縮小した相似多角形も常に同じ周期性を持っている．よって全平面の任意の点からの解は常に (a) 周期 7, (b) 周期 8 となる（ただし原点は固定点である）.

(iii) (ii) の図で示した多角形を任意倍だけ拡大縮小した相似図形を

$$f(X_{n-1}, X_n) = \text{定数}$$

の形で表せば $f(X_{n-1}, X_n)$ が保存量になる.

$$\text{(a)} : \max(X_{n-1},\ -X_{n-1},\ X_n,\ -X_n,\ -X_{n-1}-X_n)$$
$$\text{(b)} : \max(-X_{n-1},\ -X_n,\ -X_{n-1}-X_n,\ X_{n-1}+X_n)$$

[4.6] (a) の場合:

(4.16) に $a_{jk}=a_{kj}$, $b_{jk}=b_{kj}$, (4.17) と問 4.28 (a) の条件を考慮すると

$$a_{11}=0,\ a_{12}=a_{21}=a_{33},\ a_{13}=a_{31}=0,\ a_{23}=a_{32}=ca_{33}$$
$$b_{11}=b_{13}=b_{31}=0,\ b_{12}=b_{21}=1,\ b_{23}=b_{32}=c,\ b_{33}=1$$

となる．これを代入すると

$$H(x,y) = a_{33} + \frac{(a_{22}-a_{33}b_{22})xy}{x^2y+xy^2+c(x+y)+1+b_{22}xy}$$

が得られ，これより次式の $H'(x,y)$ も保存量となる.

$$H'(x,y) = \frac{a_{22}-a_{33}b_{22}}{H(x,y)-a_{33}} - b_{22} = x+y+c\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{xy}$$

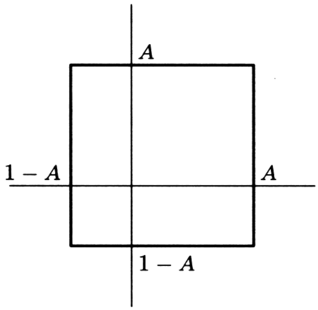
この保存量を $x=e^{X/\varepsilon}$, $y=e^{Y/\varepsilon}$, $c=e^{1/\varepsilon}$, $\varepsilon\to+0$ で超離散化すると，超離散化された保存量 $G(X,Y)$ を次式のように定義できる.

$$G(X,Y) = \lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log H' = \max(X,\ Y,\ 1-X,\ 1-Y,\ -X-Y)$$

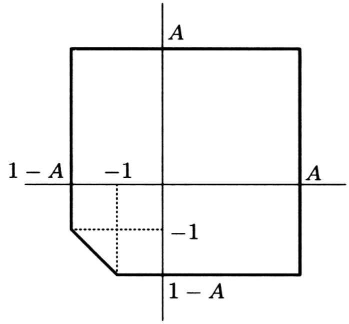
$G(X,Y)=A$ とすると，それが表す図形は連立不等式

$$1-A\le X\le A, \qquad 1-A\le Y\le A, \qquad -X-A\le Y$$

が表す領域の外周になる．したがって $1/2\le A$ でなければならず，このとき $G(X,Y)=A$ が表す多角形は以下のようになる.



$\frac{1}{2} \leq A \leq 2$ の場合



$2 < A$ の場合

(b) の場合:

$$a_{11} = a_{33},\ a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = 0,\ a_{23} = a_{32} = ca_{33}$$
$$b_{11} = 1,\ b_{12} = b_{21} = b_{13} = b_{31} = 0,\ b_{23} = b_{32} = c,\ b_{33} = 1$$

を考慮すると

$$H(x,y) = a_{33} + \frac{(a_{22} - a_{33}b_{22})xy}{x^2y^2 + c(x+y) + 1 + b_{22}xy}$$

となる．これより次式の $H'(x,y)$ も保存量となる．

$$H'(x,y) = \frac{a_{22} - a_{33}b_{22}}{H(x,y) - a_{33}} - b_{22} = xy + c\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{xy}$$

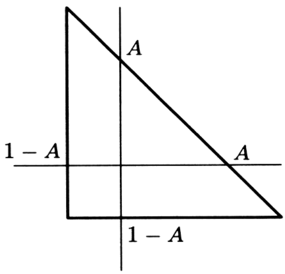
この $H'(x,y)$ を (a) と同様に超離散化すると保存量

$$G(X,Y) = \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log H' = \max(X+Y,\ 1-X,\ 1-Y,\ -X-Y)$$

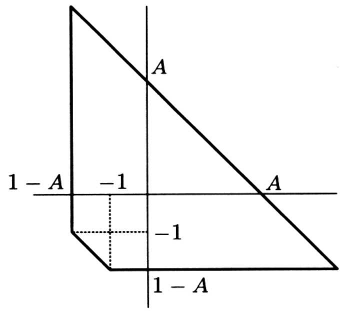
が得られる．$G(X,Y) = A$ とすると，それが表す図形は連立不等式

$$1 - A \leq X, \qquad 1 - A \leq Y, \qquad -X - A \leq Y \leq -X + A$$

が表す領域の外周になる．したがって $2/3 \leq A$ でなければならず，このとき $G(X,Y) = A$ が表す多角形は以下のようになる．



$\dfrac{2}{3} \leq A \leq 2$ の場合



$2 < A$ の場合

[4.7] それぞれの時間発展則は以下の通り.

ルール番号 3

111	110	101	100	011	010	001	000
0	0	0	0	0	0	1	1

ルール番号 20

111	110	101	100	011	010	001	000
0	0	0	1	0	1	0	0

ルール番号 234

111	110	101	100	011	010	001	000
1	1	1	0	1	0	1	0

(i) それぞれの時間発展パターンは以下の通り（0 を . で表す）.

ルール番号 3

```
...11.1.111....
111.........111
....11111111...
1111.........11
```

ルール番号 20

```
...11.1.111......
......1....1.....
......11...11....
........1....1...
```

ルール番号 234

```
......11.1.111...
.....1111.1111...
....1111111111...
...11111111111...
```

(ii) ルール番号 3 の場合，連続する 1 からの時間発展は次のようになる（0 を . で表す）.

$$
\begin{aligned}
n = 0 &: \ \texttt{...111}\cdots\texttt{111...} \\
1 &: \ \texttt{111...}\cdots\texttt{.....11} \\
2 &: \ \texttt{....111}\cdots\texttt{111..}
\end{aligned}
$$

$n=2$ のパターンは $n=0$ のパターンを右へ 1 格子分ずらしたものに等しい．したがって $n=2$ 以降では $n=0,\ 1$ のパターンを交互に繰り返しながら，右へずれていくパターンが得られる．

ルール番号 20 の場合，時間発展は次のようになる．まず，初期値が $\cdots 00100 \cdots$ の場合，すなわち 1 が 1 つしか含まれない場合は，以下のように $\cdots 00100 \cdots$, $\cdots 001100 \cdots$ のパターンを交互に繰り返しながら右へずれていく．

$$\begin{array}{rl} n=0: & \texttt{...1......} \\ 1: & \texttt{...11.....} \\ 2: & \texttt{.....1....} \\ 3: & \texttt{.....11...} \end{array}$$

初期値が 2 つ以上の 1 を含む場合，以下のように $n=1$ で 1 が 1 つだけになり，以降は上で述べた時間発展に従う．

$$\begin{array}{rl} n=0: & \texttt{...111}\cdots\texttt{111....} \\ 1: & \texttt{......}\cdots\texttt{...1...} \end{array}$$

ルール番号 234 の場合，時間発展は次のようになる．まず，初期値に 1 が 1 つだけしか含まれない場合は，以下のように $\cdots 00100 \cdots$ が左へずれていく．

$$\begin{array}{rl} n=0: & \texttt{.....1...} \\ 1: & \texttt{....1....} \\ 2: & \texttt{...1.....} \end{array}$$

初期値が 2 つ以上の 1 を含む場合，時間発展は以下のように 1 の並びが左へ 1 つずつ長くなる．

$$\begin{array}{rl} n=0: & \texttt{.....111}\cdots\texttt{111...} \\ 1: & \texttt{....1111}\cdots\texttt{111...} \\ 2: & \texttt{...11111}\cdots\texttt{111...} \end{array}$$

[4.8] たとえば

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & x_{n+1} = (1+x_n)/x_{n-1} \\ \text{(b)} & x_{n+1} = (2+x_n)/x_{n-1} \\ \text{(c)} & x_{n+1} = (1+\sqrt{x_n}+x_n)/x_{n-1} \end{array}$$

などが考えられる．$x_n = e^{X_n/\varepsilon}$, $\varepsilon \to +0$ によって超離散化を行うと，(a), (b) が (4.11) に一致するのは明らか．(c) は $X_{n+1} = \max(0, X_n/2, X_n) - X_{n-1}$ となるが，$\max(0, X_n/2, X_n) = \max(0, X_n)$ なのでやはり (4.11) に一致する．

(a) については

$$x_2 = \frac{1+x_1}{x_0}, \quad x_3 = \frac{1+x_0+x_1}{x_0 x_1}, \quad x_4 = \frac{1+x_0}{x_1}, \quad x_5 = x_0, \quad x_6 = x_1$$

となり，任意の初期値に対して途中で値が発散しない限り周期 5 の再帰性がある．

(b), (c) についてはたとえば $x_0 = 3$, $x_1 = 1$ にとると,

$$\text{(b)}\quad x_2 = 1,\quad x_3 = 3,\quad x_4 = 5,\quad x_5 = \frac{7}{3}$$

$$\text{(c)}\quad x_2 = 1,\quad x_3 = 3,\quad x_4 = 4 + \sqrt{3},\quad x_5 = \frac{5 + \sqrt{3} + \sqrt{4 + \sqrt{3}}}{3}$$

となり，ともに $x_0 \neq x_5$ なので再帰性が壊れる．なお,

$$\text{(d)}\quad x_{n+1} = (1 + 2\sqrt{x_n} + x_n)/x_{n-1}$$

も同じ超離散化で (4.11) が導かれる．$\sqrt{x_n} = y_n$ とおくと y_n は非負であり，$y_{n+1} = (1 + y_n)/y_{n-1}$ が得られるので (d) は周期 5 となる．

[4.9] (i) 交換則 $x \odot y = y \odot x$ が成り立つためには $b = c$ でなければならない．以下はこれを仮定する．

結合則は

$$(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$$

であるが，交換則が成り立つなら左辺は $z \odot (y \odot x)$ と変形できる．したがって $x \neq z$ のときに上式の左辺と右辺が常に等しければ結合則が成り立つ．つまり $(x, y, z) = (0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ の 4 通りで等式が成り立てばよい．これを書き下すと

$$(0 \odot 0) \odot 1 = 0 \odot (0 \odot 1)$$
$$(0 \odot 1) \odot 1 = 0 \odot (1 \odot 1)$$
$$(1 \odot 0) \odot 0 = 1 \odot (0 \odot 0)$$
$$(1 \odot 1) \odot 0 = 1 \odot (1 \odot 0)$$

となるが，交換則が成り立てばさらに上の 2 式から下の 2 式を導くことができる．

以上より

$$b = c, \qquad a \odot 1 = 0 \odot b, \qquad b \odot 1 = 0 \odot d$$

が成り立つような $a \sim d$ を求めればよい．a, $b (= c)$, d のあらゆる組合せに対してこの条件を満足するのは以下の 6 通りである．

$$(a, b, d) = (0, 0, 0),\ (0, 0, 1),\ (0, 1, 0),\ (0, 1, 1),\ (1, 0, 1),\ (1, 1, 1)$$

(ii) 時間発展則の表を書き下してルール番号を計算すると以下のようになる．

(a, b, d)	$U_{j-1}^n \odot U_j^n$	$U_{j-1}^n \odot U_{j+1}^n$	$U_j^n \odot U_{j+1}^n$	$U_{j-1}^n \odot U_j^n \odot U_{j+1}^n$
$(0, 0, 0)$	0	0	0	0
$(0, 0, 1)$	192	160	136	128
$(0, 1, 0)$	60	90	102	150
$(0, 1, 1)$	252	250	238	254
$(1, 0, 1)$	195	165	153	150
$(1, 1, 1)$	255	255	255	255

したがって該当するルール番号は 0, 60, 90, 102, 128, 136, 150, 153, 160, 165, 192, 195, 238, 250, 252, 254, 255 の 17 個である．

第 5 章

[5.1] (i)

$$u = \frac{f_x}{f}, \quad u_x = \frac{f_{xx}}{f} - \frac{f_x^2}{f^2}, \quad u_{xx} = \frac{f_{xxx}}{f} - 3\frac{f_x f_{xx}}{f^2} + 2\frac{f_x^3}{f^3}$$

$$u_{xxx} = \frac{f_{xxxx}}{f} - 4\frac{f_x f_{xxx}}{f^2} - 3\frac{f_{xx}^2}{f^2} + 12\frac{f_x^2 f_{xx}}{f^3} - 6\frac{f_x^4}{f^4}$$

ゆえに

$$\frac{f_{xx}}{f} = u_x + u^2, \quad \frac{f_{xxx}}{f} = u_{xx} + 3uu_x + u^3$$

$$\frac{f_{xxxx}}{f} = u_{xxx} + 4uu_{xx} + 3u_x^2 + 6u^2 u_x + u^4$$

(ii)

$$u_t = \frac{f_{xt}}{f} - \frac{f_x f_t}{f^2} = \frac{f_{xxxx}}{f} - \frac{f_x f_{xxx}}{f^2}$$

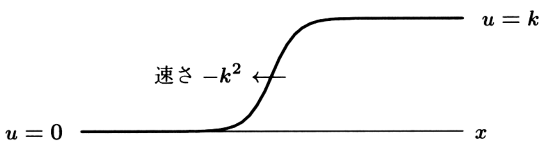
$$= u_{xxx} + 3uu_{xx} + 3u_x^2 + 3u^2 u_x$$

答：$u_t = u_{xxx} + \dfrac{3}{2}(u^2)_{xx} + (u^3)_x$

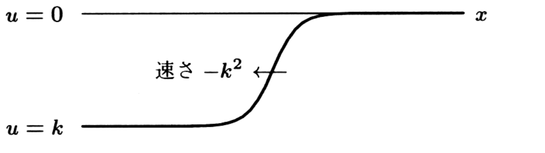
(iii) $f_t = f_{xxx}$ に代入すると $\omega = k^3$.

$$u = \frac{f_x}{f} = \frac{ke^{kx+\omega t}}{1 + e^{kx+\omega t}} = \frac{k}{1 + e^{-k(x+k^2 t)}}$$

u のグラフは以下の通り．



$k > 0$ の場合



$k < 0$ の場合

[5.2] (i)

$$\begin{aligned} n=0:&\quad 002110121\\ 1:&\quad 101111111\\ 2:&\quad 110111111 \end{aligned}$$

$n \geq 1$ で 101111111 の周期パターンが右に 1 格子分ずつずれていく．

(ii)

$$\begin{aligned} n=0:&\quad 022121101\\ 1:&\quad 121211110\\ 2:&\quad 112111111\\ 3:&\quad 121111111 \end{aligned}$$

$n \geq 2$ で 112111111 の周期パターンが左に 1 格子分ずつずれていく．

[5.3] (i) (a) $U_j^n = L - V_j^n$ を (5.21) に代入する．

$$L - V_j^{n+1} = L - V_j^n + \min(L - V_{j-1}^n,\, V_j^n) - \min(L - V_j^n,\, V_{j+1}^n)$$

ゆえに

$$V_j^{n+1} = V_j^n + \min(V_{j+1}^n,\, L - V_j^n) - \min(V_j^n,\, L - V_{j-1}^n)$$

(b) $U_j^n = V_{-j}^n$ を代入する．

$$V_{-j}^{n+1} = V_{-j}^n + \min(V_{-j+1}^n,\, L - V_{-j}^n) - \min(V_{-j}^n,\, L - V_{-j-1}^n)$$

$-j = j'$ とすると

$$V_{j'}^{n+1} = V_{j'}^n + \min(V_{j'+1}^n,\, L - V_{j'}^n) - \min(V_{j'}^n,\, L - V_{j'-1}^n)$$

(ii) (a) U_j^n は時刻 n, 格子 j での車の台数なので，$V_j^n = L - U_j^n$ は空きスペースを表す．
(b) U_j^n は車が右（$+j$ 方向）に動くモデルにおける車の台数を表している．V_j^n は $j \to -j$ の座標変換を行っているので，車が左に動くモデルにおける車の台数を意味する．

注：(i) の (a) と (b) で同じ形の式が得られたということは，車の移動と同じルールで空きスペースが逆方向に動くことを意味する．

[5.4] (i) $\min(U_j^n,\, 1 - U_{j+1}^n)$ は時刻 n で格子 j から $j+1$ へ動く車の台数を表している．したがって P^n は時刻 n で空間 1 周期分における動く車の総台数を表す．また，1 時刻あたり格子 1 つ分右に動く車の運動量を 1 とするなら，P^n は空間 1 周期分の車の全運動量を表している．さらに，P^n を 1 周期分の車の総台数で割ると平均速度になる．

(ii)

$$
\begin{aligned}
P^{n+1} &= \sum_{j=1}^{K} \min(U_j^{n+1},\, 1 - U_{j+1}^{n+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{K} \min(U_j^n + \min(U_{j-1}^n,\, 1 - U_j^n) - \min(U_j^n,\, 1 - U_{j+1}^n), \\
&\qquad 1 - U_{j+1}^n - \min(U_j^n,\, 1 - U_{j+1}^n) + \min(U_{j+1}^n,\, 1 - U_{j+2}^n)) \\
&= \sum_{j=1}^{K} [\min(U_j^n + \min(U_{j-1}^n,\, 1 - U_j^n),\, 1 - U_{j+1}^n + \min(U_{j+1}^n,\, 1 - U_{j+2}^n)) \\
&\qquad - \min(U_j^n,\, 1 - U_{j+1}^n)] \\
&= \sum_{j=1}^{K} [\min(1,\, U_{j-1}^n + U_j^n,\, 2 - U_{j+1}^n - U_{j+2}^n) - \min(U_j^n,\, 1 - U_{j+1}^n)] \\
&= \sum_{j=1}^{K} [\min(2,\, 1 + U_{j+1}^n + U_{j+2}^n,\, U_{j-1}^n + U_j^n + U_{j+1}^n + U_{j+2}^n) \\
&\qquad - U_{j+1}^n - U_{j+2}^n - \min(U_j^n,\, 1 - U_{j+1}^n)] \\
&= \sum_{j=1}^{K} [\min(2,\, 1 + U_{j+1}^n + U_{j+2}^n,\, U_{j-1}^n + U_j^n + U_{j+1}^n + U_{j+2}^n) \\
&\qquad - 2U_j^n - \min(U_j^n,\, 1 - U_{j+1}^n)]
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
&P^{n+1} - P^n \\
&= \sum_{j=1}^{K} [\min(2,\, 1 + U_{j+1}^n + U_{j+2}^n,\, U_{j-1}^n + U_j^n + U_{j+1}^n + U_{j+2}^n) \\
&\qquad - 2U_j^n - \min(U_{j-1}^n,\, 1 - U_j^n) - \min(U_{j+1}^n,\, 1 - U_{j+2}^n)] \\
&= \sum_{j=1}^{K} [\min(2,\, 1 + U_{j+1}^n + U_{j+2}^n,\, U_{j-1}^n + U_j^n + U_{j+1}^n + U_{j+2}^n) \\
&\qquad - 2U_j^n - \min(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n,\, 1 - U_j^n + U_{j+1}^n, \\
&\qquad\qquad 1 + U_{j-1}^n - U_{j+2}^n,\, 2 - U_j^n - U_{j+2}^n)] \\
&= \sum_{j=1}^{K} [\min(2,\, 1 + U_{j+1}^n + U_{j+2}^n,\, U_{j-1}^n + U_j^n + U_{j+1}^n + U_{j+2}^n) \\
&\qquad - \min(2,\, 1 + U_{j-1}^n + U_j^n,\, 1 + U_{j+1}^n + U_{j+2}^n, \\
&\qquad\qquad U_{j-1}^n + U_j^n + U_{j+1}^n + U_{j+2}^n)]
\end{aligned}
$$

最右辺では，前の min の中の 3 つの項はどれも後の min に含まれている．したがって（前の min）$\geq$（後の min）．ゆえに $P^{n+1} \geq P^n$.

[5.5] (i) $\rho < 1/2$ のとき，$U_j^{n+1} = U_{j-1}^n$ を (5.28) に代入すると

$$U_{j-1}^n = U_j^n + \min(U_{j-1}^n,\, 1 - U_j^n) - \min(U_j^n,\, 1 - U_{j+1}^n)$$

ゆえに

$$\min(0,\, 1 - U_{j-1}^n - U_j^n) = \min(0,\, 1 - U_j^n - U_{j+1}^n)$$

任意の j で上が成り立つので $\min(0,\, 1 - U_j^n - U_{j+1}^n)$ は j によらない定数となる．さらに $\rho < 1/2$ なので $U_j^n + U_{j+1}^n \leq 1$ となる j が任意の n で必ず存在する．したがって $\min(0, 1 - U_j^n - U_{j+1}^n) = 0$ であり，j, n によらない定数となる．

$\rho > 1/2$ のとき，$U_j^{n+1} = U_{j+1}^n$ を (5.28) に代入すると，同様に

$$\min(U_{j-1}^n + U_j^n,\, 1) = \min(U_j^n + U_{j+1}^n,\, 1)$$

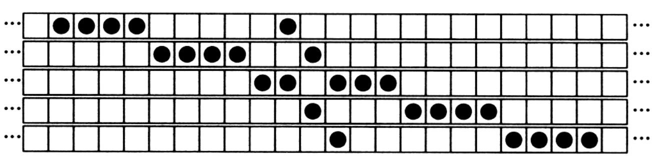
が得られるので $\min(U_j^n + U_{j+1}^n,\, 1)$ は j によらない定数になる．また，$\rho > 1/2$ なので $U_j^n + U_{j+1}^n \geq 1$ となる j が任意の n で必ず存在する．したがって $\min(U_j^n + U_{j+1}^n,\, 1) = 1$ であり，j, n によらない定数となる．

(ii) $\rho < 1/2$ のとき $\min(0,\, 1 - U_j^n - U_{j+1}^n) = 0$ より $U_j^n + U_j^{n+1} \leq 1$. すなわち隣り合う格子点での U の値が同時に 1 になることはない．$\rho > 1/2$ のとき $\min(U_j^n + U_{j+1}^n,\, 1) = 1$ より $U_j^n + U_j^{n+1} \geq 1$. すなわち隣り合う格子点での U の値が同時に 0 になることはない．

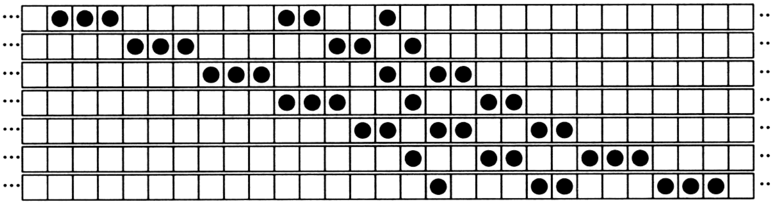
(iii) $\rho < 1/2$ のとき U_j^N の値のパターンにおける 1 の右隣は必ず 0 になる．したがって交通流モデルで考えると，すべての 1 は次の時刻で右隣に移る．すると次の時刻でも 1 の右隣は必ず 0 であり，結局 $n \geq N$ ではパターンが右シフトするだけである．同様に $\rho > 1/2$ のときすべての 0 の左隣は 1 であるので，交通流モデルで考えるとすべての 0 が次の時刻で左隣に移る．ゆえに $n \geq N$ で $U_j^{n+1} = U_{j+1}^n$.

第 6 章

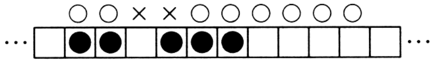
[6.1] (i)



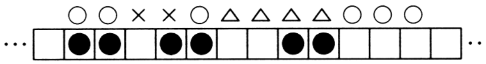
(ii)



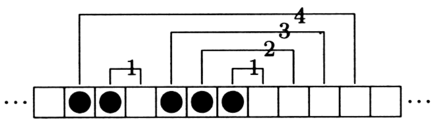
[6.2] (i) (a)



(b)

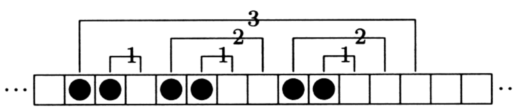


(ii) (a)



深さ 1, 2, 3, 4 のペアがそれぞれ 2, 1, 1, 1 個，それ以外のペアが 0 個.

(b)



深さ 1, 2, 3 のペアがそれぞれ 3, 2, 1 個，それ以外のペアが 0 個.

[6.3] 以下の図では 0 を . で表す.

(i)

```
..111...11...1..............
.....111..11..1.............
........11..11.11...........
..........11..1..111........
............11.1....111.....
..............1.11.....111..
```

(ii)

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
. & . & 1 & 1 & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 2 & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & -1 & 2 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & -1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & -1 & . & 1 & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & 1 & 1 & . & .
\end{array}
$$

[6.4] $B_j^n = a_{j-n}$ を (6.1) に代入すると,

$$a_{j-n-1} = \min\Big(1 - a_{j-n},\ \sum_{i=-\infty}^{j-1} (a_{i-n} - a_{i-n-1})\Big)$$

となる．さらに境界条件 $\lim_{j\to-\infty} B_j^n = 0$ より $\lim_{j\to-\infty} a_{j-n} = \lim_{j\to-\infty} a_j = 0$ となり,

$$\text{右辺} = \min(1 - a_{j-n}, a_{j-n-1})$$

となる．ゆえに

$$\min(0,\ 1 - a_{j-n} - a_{j-n-1}) = 0$$

が導かれる．この式は任意の j, n で成り立つので $j - n = k$ とおくと

$$\min(0,\ 1 - a_k - a_{k-1}) = 0$$

したがって a_k が満たすべき条件は $a_k + a_{k-1} \leq 1$ である.（注：この条件から $B_j^n + B_{j-1}^n \leq 1$ となる．B_j^n は 0 か 1 なので $(B_{j-1}^n, B_j^n) \neq (1,1)$ となる．すなわち玉が 2 個以上連続してはいけない．このとき確かに B_j^n は速さ 1 の進行波解になる.）

[6.5] (i)

$$U_j^{n+1} - U_j^n = \varepsilon \log \frac{1 + e^{(U_{j-1}^n - L_{n+1})/\varepsilon}}{1 + e^{(U_{j+1}^{n+1} - L_{n+2})/\varepsilon}}$$

$\varepsilon \to +0$ より

$$U_j^{n+1} - U_j^n = \max(0,\ U_{j-1}^n - L_{n+1}) - \max(0,\ U_{j+1}^{n+1} - L_{n+2})$$

(ii)

$$B_j^{n+1} = \min\Big(L_j - B_j^n,\ \sum_{i=-\infty}^{j-1} (B_i^n - B_i^{n+1})\Big)$$

(iii) $S_j^n = \sum_{i=-\infty}^{j} B_i^n$ とすると

$$S_j^{n+1} - S_{j-1}^{n+1} = \min(L_j - S_j^n + S_{j-1}^n,\ S_{j-1}^n - S_{j-1}^{n+1})$$

ゆえに

$$S_{j+1}^{n+1} - S_j^n = \min(0,\ L_{j+1} - S_{j+1}^n + S_j^{n+1})$$

$V_j^n = S_{j+1}^n - S_j^{n+1}$ とすると

$$\begin{aligned}V_{j+1}^{n+1} - V_j^n &= \min(0,\, L_{j+2} - V_{j+1}^n) - \min(0,\, L_{j+1} - V_j^{n+1}) \\ &= \max(0,\, V_j^{n+1} - L_{j+1}) - \max(0,\, V_{j+1}^n - L_{j+2})\end{aligned}$$

$U_{j-n}^j = V_j^n$ とすると

$$U_{j-n}^{j+1} - U_{j-n}^j = \max(0,\, U_{j-n-1}^j - L_{j+1}) - \max(0,\, U_{j-n+1}^{j+1} - L_{j+2})$$

$j-n \to j,\ j \to n$ と書き換えると

$$U_j^{n+1} - U_j^n = \max(0,\, U_{j-1}^n - L_{n+1}) - \max(0,\, U_{j+1}^{n+1} - L_{n+2})$$

[6.6] (i) $\Omega_1 = 0,\ \Omega_2 = 2,\ A_{12} = -2$ より

$$F_j^n = \max(0,\, j,\, 3j-2n,\, 4j-2n-2)$$

また (6.29) より

$$\begin{aligned}B_j^n &= F_{j-n+1}^j + F_{j-n-1}^{j-1} - F_{j-n}^{j-1} - F_{j-n}^j \\ &= \max(0,\, j-n+1,\, j-3n+3,\, 2j-4n+2) \\ &\qquad + \max(0,\, j-n-1,\, j-3n-1,\, 2j-4n-4) \\ &\qquad - \max(0,\, j-n,\, j-3n+2,\, 2j-4n) \\ &\qquad - \max(0,\, j-n,\, j-3n,\, 2j-4n-2)\end{aligned}$$

(ii) まず $n \geq 1$ より $j-n \geq j-3n+2$ したがって

$$\begin{aligned}B_j^n = {}& \max(0,\, j-n+1,\, 2j-4n+2) + \max(0,\, j-n-1,\, 2j-4n-4) \\ & - \max(0,\, j-n,\, 2j-4n) - \max(0,\, j-n,\, 2j-4n-2)\end{aligned}$$

(a) $j-n \leq -1,\ 2j-4n \leq -2n-2 \leq -4$ より

$$B_j^n = 0+0-0-0 = 0$$

(b)

$$\begin{aligned}B_j^n &= \max(0,1,-2n+2) + \max(0,-1,-2n-4) \\ &\qquad - \max(0,0,-2n) - \max(0,0,-2n-2) \\ &= 1+0-0-0 = 1\end{aligned}$$

(c) $1 \leq j-n,\ 2j-4n \leq j-n-1$ より

$$B_j^n = (j-n+1) + (j-n-1) - (j-n) - (j-n) = 0$$

(d) $2 \leq 2n \leq j-n \leq 2j-4n \leq j-n+2$ より

$$B_j^n = (2j-4n+2)+(j-n-1)-(2j-4n)-(j-n) = 1$$

(e) $5 \leq 2n+3 \leq j-n \leq 2j-4n-3$ より

$$B_j^n = (2j-4n+2)+(2j-4n-4)-(2j-4n)-(2j-4n-2) = 0$$

[6.7] (i) $V_j^n = F_{j-n-1}^j + F_{j-n+2}^{j+1} - F_{j-n}^j - F_{j-n+1}^{j+1}$

(ii) $V_j^n = S_{j+1}^n - S_j^{n+1} = (F_{j-n+2}^{j+1} - F_{j-n+1}^{j+1}) - (F_{j-n}^j - F_{j-n-1}^j)$ より C を定数として

$$S_j^n = F_{j-n+1}^j - F_{j-n}^j + C$$

(iii) $B_j^n = S_j^n - S_{j-1}^n = F_{j-n+1}^j - F_{j-n}^j - F_{j-n}^{j-1} + F_{j-n-1}^{j-1}$

第7章

[7.1] 以下の規則に注意する.

$$U_{ij}^{n+1} = \begin{cases} 0 & (U_{ij}^{n-1} = 1 \text{ のとき}) \\ \max(U_{ij}^n, U_{i-1j}^n, U_{i+1j}^n, U_{ij-1}^n, U_{ij+1}^n) & (U_{ij}^{n-1} = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(i)

$$\begin{matrix} * & * & * & * & * \\ * & * & 0 & * & * \\ * & 0 & 1 & 0 & * \\ * & * & 0 & * & * \\ * & * & * & * & * \end{matrix} \quad \begin{matrix} * & * & * & * & * \\ * & * & 0 & * & * \\ * & 0 & 1 & 0 & * \\ * & * & 0 & * & * \\ * & * & * & * & * \end{matrix} \quad \begin{matrix} * & * & * & * & * \\ * & * & 1 & * & * \\ * & 1 & 0 & 1 & * \\ * & * & 1 & * & * \\ * & * & * & * & * \end{matrix} \quad \begin{matrix} * & * & * & * & * \\ * & * & 1 & * & * \\ * & 1 & 0 & 1 & * \\ * & * & 1 & * & * \\ * & * & * & * & * \end{matrix}$$
$$n=0 \qquad\qquad n=1 \qquad\qquad n=2 \qquad\qquad n=3$$

$$\begin{matrix} * & * & * & * & * \\ * & * & 0 & * & * \\ * & 0 & 1 & 0 & * \\ * & * & 0 & * & * \\ * & * & * & * & * \end{matrix} \quad \begin{matrix} * & * & * & * & * \\ * & * & 0 & * & * \\ * & 0 & 1 & 0 & * \\ * & * & 0 & * & * \\ * & * & * & * & * \end{matrix}$$
$$n=4 \qquad\qquad n=5$$

中央の 5 点は周囲の値と無関係に

$$\begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \\ & 1 & \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \\ & 1 & \end{matrix}$$

を周期 4 で繰り返す. これはターゲットパターンの中心部に相当する.

(ii)

$$\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & * \\ * & 1 & 1 & * \\ * & * & * & * \end{array} \quad \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & 0 & 1 & * \\ * & 0 & 1 & * \\ * & * & * & * \end{array} \quad \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & 1 & 1 & * \\ * & 0 & 0 & * \\ * & * & * & * \end{array} \quad \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & 1 & 0 & * \\ * & 1 & 0 & * \\ * & * & * & * \end{array}$$

$n=0$　　$n=1$　　$n=2$　　$n=3$

$$\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & * \\ * & 1 & 1 & * \\ * & * & * & * \end{array} \quad \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & 0 & 1 & * \\ * & 0 & 1 & * \\ * & * & * & * \end{array}$$

$n=4$　　$n=5$

中央の 4 点は周囲の値と無関係に

$$\begin{matrix} 0\ 0 \\ 1\ 1 \end{matrix} \to \begin{matrix} 0\ 1 \\ 0\ 1 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1\ 1 \\ 0\ 0 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1\ 0 \\ 1\ 0 \end{matrix}$$

を周期 4 で繰り返す．これはスパイラルパターンの中心部に相当する．

[7.2]　(i)

$$G_{k+1} = \max(0,\, G_k - G_{k-1},\, G_{k+1} - G_{k-1}) \geq 0$$

任意の k で上式が成り立つので $G_k \geq 0$.

(ii) すべての k に対して $G_k > 0$ とすると，$G_{k-1}+G_{k+1}$ は $G_{k\pm1}$ より大きいので (7.9) より $G_{k-1}+G_{k+1} = G_k$ となり，$G_k > G_{k-1}$ かつ $G_k > G_{k+1}$ となる．ところがこの条件は任意の k で成り立たねばならず，矛盾する．したがって $G_k = 0$ となる k が必ず存在する．

(iii) k を固定して (7.9) を満たす G_{k-1}, G_k, G_{k+1} を考えると

$$\begin{aligned}(G_{k-1}, G_k, G_{k+1}) =& (0,0,0),\ (0,0,a),\ (a,0,0),\ (0,a,a),\\ & (a,a,0),\ (0,a,A),\ (A,a,0),\ (a,a+b,b)\end{aligned}$$

のどれかのパターンとなる．ただし a, b, A は正の数で $a < A$ である．

次に α を正の数とし，$G_k = 0$, $G_{k+1} = \alpha$ とすると，上の条件より

$$(G_{k-1}, G_k, G_{k+1}, G_{k+2}, G_{k+3}, G_{k+4}) = (0,0,\alpha,\alpha,0,0)$$
$$(G_{k-1}, G_k, G_{k+1}, G_{k+2}, G_{k+3}, G_{k+4}, G_{k+5}) = (0,0,\alpha,\alpha+\beta,\beta,0,0)$$

のどちらかのパターンしかあり得ない．ただし β は正の数である．また，$G_k = \alpha$, $G_{k+1} = 0$ とすると，

$$(G_{k-3}, G_{k-2}, G_{k-1}, G_k, G_{k+1}, G_{k+2}) = (0,0,\alpha,\alpha,0,0)$$
$$(G_{k-4}, G_{k-3}, G_{k-2}, G_{k-1}, G_k, G_{k+1}, G_{k+2}) = (0,0,\beta,\alpha+\beta,\alpha,0,0)$$

のどちらかのパターンしかあり得ない.

したがって (7.9) の解 G_k が満たすべき一般的な条件とは以下のようになる.

> $\cdots G_{k-2}G_{k-1}G_kG_{k+1}G_{k+2}\cdots$ というぐあいに G_k を順に並べたパターンを考えるとき，0 でない部分は $\alpha\alpha$ あるいは $\alpha(\alpha+\beta)\beta$ という形のどちらかであり，それら 0 でない部分同士の間には 2 個以上の 0 が存在する．あるいはすべての G_k が 0 である.

(iv) (iii) の解にさらに k について周期 4 の周期条件を課せば (7.15) の解が得られるので，$\alpha \geq 0$ として

$$(G_0, G_1, G_2, G_3) = (0,0,\alpha,\alpha),\ (\alpha,0,0,\alpha),\ (\alpha,\alpha,0,0),\ (0,\alpha,\alpha,0)$$

のどれかとなる.

[7.3] (i) (a)

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \\ & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

$$n=0 \qquad n=1 \qquad n=2 \qquad n=3$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & \end{array}$$

$$n=4 \qquad n=5$$

特に記していない周辺部はすべて 0 である.

(b)

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \\ & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

$$n=0 \qquad n=1 \qquad n=2 \qquad n=3$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & \end{array}$$

$n = 4$　　　　　$n = 5$

(ii) (ア) にしたがうと，max の値が 1 の場合，$U_{ij}^{n-1} = 0, 1$ なら $U_{ij}^{n+1} = 1, 0$ となる．ところが max の値が 0 の場合，$U_{ij}^{n-1} = 0$ なら $U_{ij}^{n+1} = 0$ だが，$U_{ij}^{n-1} = 1$ のときは $U_{ij}^{n+1} = -1$ となる．したがって任意の i, j に対し，U_{ij}^n, $U_{i\pm1j}^n$, $U_{ij\pm1}^n$ がすべて 0 のときに $U_{ij}^{n-1} = 0$ であればよい．

(iii) U_{ij}^{n-1}, U_{ij}^n を 0, 1 に限定したとき，(7.1) は

$$U_{ij}^{n+1} = \begin{cases} 1 - U_{ij}^{n-1} & (U_{ij}^n,\ U_{i\pm1j}^n,\ U_{ij\pm1}^n \text{ の少なくとも 1 つが 1 のとき}) \\ 0 & (U_{ij}^n,\ U_{i\pm1j}^n,\ U_{ij\pm1}^n \text{ のすべてが 0 のとき}) \end{cases}$$

となる．一方，(ア) は (ii) より

$$U_{ij}^{n+1} = \begin{cases} 1 - U_{ij}^{n-1} & (U_{ij}^n,\ U_{i\pm1j}^n,\ U_{ij\pm1}^n \text{ の少なくとも 1 つが 1 のとき}) \\ 0 & (U_{ij}^n,\ U_{i\pm1j}^n,\ U_{ij\pm1}^n \text{ のすべてが 0 で } U_{ij}^{n-1} = 0 \text{ のとき}) \\ -1 & (U_{ij}^n,\ U_{i\pm1j}^n,\ U_{ij\pm1}^n \text{ のすべてが 0 で } U_{ij}^{n-1} = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる．したがってもし (7.1) の解のうち，

> 任意の i, j, n について U_{ij}^n, $U_{i\pm1j}^n$, $U_{ij\pm1}^n$ のすべてが 0 のときに U_{ij}^{n-1} も 0 である．

という条件を満足する解があれば，それは (ア) の解にもなる．そして，図 7.2~7.6 の解はすべてこの条件を満たす．

[7.4] (7.1) の場合と同様の座標曲線を考え，各曲線上での値は等しいとし，m 番の曲線の時刻 n での値を F_m^n とする．すると (イ) より F_m^n について次式が成り立つ．

$$F_m^{n+1} = \max(F_{m-1}^n, F_m^n, F_{m+1}^n) - F_m^{n-1} - F_m^n$$

さらに進行波解 $F_m^n = G_{m\pm n}$ を考えると G_k について次式が成り立つ．

$$G_{k+1} + G_k + G_{k+1} = \max(G_{k-1}, G_k, G_{k+1}) \qquad (ウ)$$

右辺は G_{k-1}，G_k，G_{k+1} のどれかに等しく，左辺と比べることにより，$G_{k-1} + G_k$，$G_{k-1} + G_{k+1}$，$G_k + G_{k+1}$ のどれかが 0 に等しくなる．今は U_{ij}^n を 0 か 1 に限定しているので G_k も 0 か 1 に限定され，よって G_{k-1}，G_k，G_{k+1} のどれか 2 つが 0 になる．

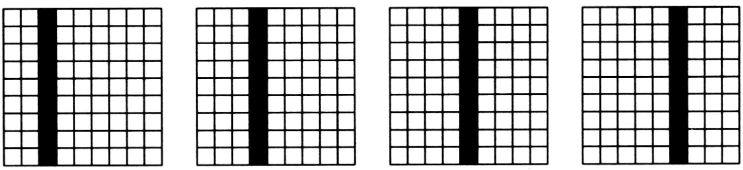
すると k を固定したとき (ウ) の方程式から許される値の組は

$$(G_{k-1}, G_k, G_{k+1}) = (0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,0),\ (1,0,0)$$

のどれかとなる．したがって，$\cdots G_{-2}G_{-1}G_0G_1G_2\cdots$ というぐあいに G_k の値を並べたパターンを考えると，以下の条件が満たされなければならない．

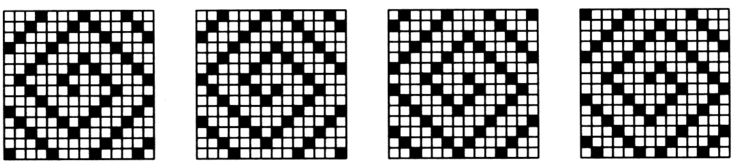
もしパターン中に 1 が存在するならその両側それぞれに少なくとも 2 つ以上の 0 が隣接する．

このことより，進行波としてたとえば次図の (a) のようなものが，スパイラルパターンとして (b) のようなものが存在する．



$n=0$　　$n=1$　　$n=2$　　$n=3$

(a)



$n=0$　　$n=1$　　$n=2$　　$n=3$

(b)

上のパターンと (7.1) の解のパターンとの明らかな違いは，1 が並んで作る黒い帯の幅である．

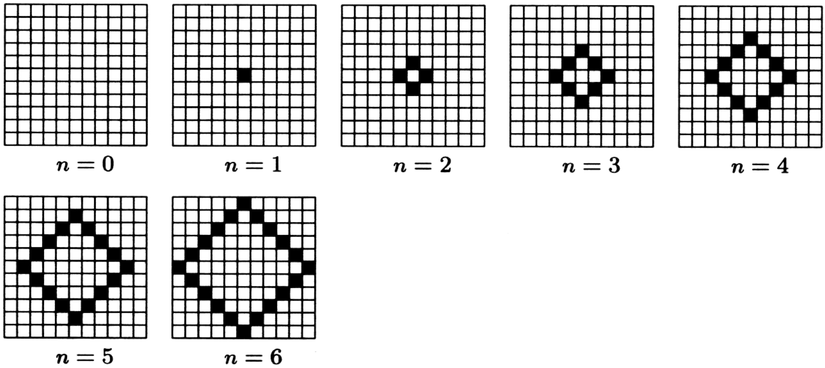
リングパターンについては，図 7.12 (a) の座標曲線を用いて

$$\begin{cases} F_m^{n+1} = \max(F_{m-1}^n, F_m^n, F_{m+1}^n) - F_m^{n-1} - F_m^n & (1 \le m) \\ F_0^{n+1} = \max(F_0^n, F_1^n) - F_0^{n-1} - F_0^n \end{cases}$$

が導かれる．U を 0 か 1 に限定するので F もすべて 0 か 1 であり，$F_m^{n-1} = F_m^n = 1$ となると $F_m^{n+1} < 0$ となるので，仮定に反する．このことに注意しながらリングパターンを生み出す F_m^n を求めると，たとえば

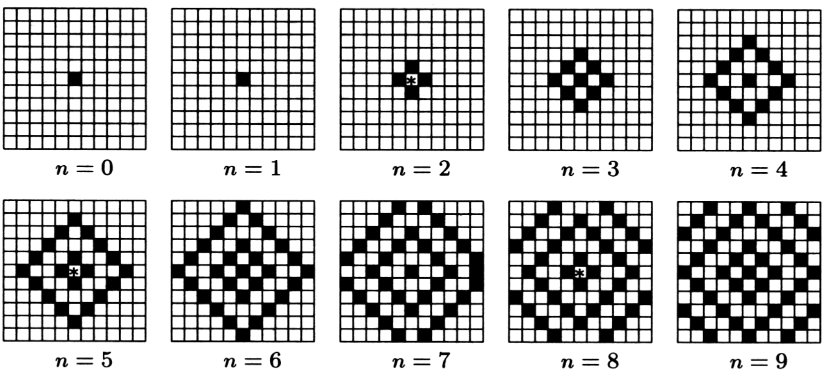
$m=$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$n=0$	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
1	1	0	0	0	0	0	$\cdots$
2	0	1	0	0	0	0	$\cdots$
3	0	0	1	0	0	0	$\cdots$
4	0	0	0	1	0	0	$\cdots$

というパターンがある．これを元に U_{ij}^{n} のパターンを再現したものを次図に示す．



この解も，1 の帯の幅が (7.1) の解と比べて狭い．

ターゲットパターンについては，議論の詳細を省くが 0 と 1 だけでうまく作れないことがわかっている．ただし，パターンの中央部に -1 の値を許せば，他は 0 と 1 だけでターゲットパターンが作れる．その解を次図に示す．図中の $*$ が -1 の値を表す．



付録C

QRT系への変換

ここでは次式の形の 2 階差分方程式を QRT 系に変換する方法の概略を説明する．

$$x_{n+1} = \frac{f_1(n) - x_{n-1} f_2(n)}{f_2(n) - x_{n-1} f_3(n)} \tag{C.1}$$

ここで $f_1(n)$, $f_2(n)$, $f_3(n)$ はそれぞれ x_n の 2 次式である．

$$\begin{aligned} f_1(n) &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2, \\ f_2(n) &= b_0 + b_1 x_n + b_2 x_n^2, \\ f_3(n) &= c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2 \end{aligned}$$

一方 QRT 系は次のように表現される．

$$x_{n+1} = \frac{F_1(n) - x_{n-1} F_2(n)}{F_2(n) - x_{n-1} F_3(n)} \tag{C.2}$$

ここで $F_1(n) \sim F_3(n)$ は x_n の 4 次式で次のような特別な形式で表現される．まず 2 個の縦ベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ を次式で導入する:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^2 \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} x_n^2 + a_{12} x_n + a_{13} \\ a_{12} x_n^2 + a_{22} x_n + a_{23} \\ a_{13} x_n^2 + a_{23} x_n + a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^2 \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} x_n^2 + b_{12} x_n + b_{13} \\ b_{12} x_n^2 + b_{22} x_n + b_{23} \\ b_{13} x_n^2 + b_{23} x_n + b_{33} \end{pmatrix}$$

次に $F_1(n) \sim F_3(n)$ を成分とするベクトル $\boldsymbol{F} = (F_1(n), F_2(n), F_3(n))^T$ を導入し，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のベクトル積で定義する．

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$$

これで，$F_j(n)$ が定義された．

ベクトル積の性質より $\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ に直交する．

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{C.3}$$

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{C.4}$$

さて (C.1) と (C.2) より，$f_2(n)\neq 0$, $F_2(n)\neq 0$ のとき

$$\frac{\frac{f_1(n)}{f_2(n)}-x_{n-1}}{1-x_{n-1}\frac{f_3(n)}{f_2(n)}}=\frac{\frac{F_1(n)}{F_2(n)}-x_{n-1}}{1-x_{n-1}\frac{F_3(n)}{F_2(n)}}$$

となり，したがって

$$\frac{f_1(n)}{f_2(n)}=\frac{F_1(n)}{F_2(n)},\qquad \frac{f_3(n)}{f_2(n)}=\frac{F_3(n)}{F_2(n)}$$

となる．また $f_2(n)=0$, $F_2(n)=0$ のとき

$$\frac{f_1(n)}{f_3(n)}=\frac{F_1(n)}{F_3(n)}$$

となる．これらの結果をまとめると $f_1(n)\sim f_3(n)$ と $F_1(n)\sim F_3(n)$ の間には常に等式

$$\begin{aligned}F_1(n)f_2(n)-F_2(n)f_1(n)&=0,\\F_2(n)f_3(n)-F_3(n)f_2(n)&=0,\\F_3(n)f_1(n)-F_1(n)f_3(n)&=0\end{aligned} \tag{C.5}$$

が成り立つ．

与えられた 2 階差分方程式が QRT 系であるかどうかは 2 次の多項式 $f_1(n)\sim f_3(n)$ が与えられたとき特別の形をもつ 4 次の多項式 $F_1(n)\sim F_3(n)$ が求まるかどうかで決まる．したがって問題は (C.5) が解けるかどうかである（$f_2(n)\neq 0$, $F_2(n)\neq 0$ のとき）．しかし (C.5) は未知数 a_{ij}, b_{ij} についての 2 次方程式であるので解を求めるのは簡単ではない．

そこで問題の解決を 2 段階に分けてまず $F_1(n)\sim F_3(n)$ を普通の 4 次多項式の形で求める．

$$\begin{aligned}F_1(n)&=p_0+p_1x_n+p_2x_n^2+p_3x_n^3+p_4x_n^4,\\F_2(n)&=q_0+q_1x_n+q_2x_n^2+q_3x_n^3+q_4x_n^4,\\F_3(n)&=r_0+r_1x_n+r_2x_n^2+r_3x_n^3+r_4x_n^4\end{aligned}$$

ここで p_i, q_i, r_i は未知数で，これらに関する連立線形方程式である (C.5) より決定できる．

次に (C.3) を使ってベクトル $\boldsymbol{A}$ を定め，(C.4) を使ってベクトル $\boldsymbol{B}$ を定める．どちらも線形方程式であるので容易に解ける．そして $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ より求めたかった (C.2) の $F_1(n)\sim F_3(n)$ が決定される．

索　　引

著者紹介

広田　良吾（ひろた　りょうご）

1961年　米国ノースウエスタン大学大学院博士課程修了

1961年　Ph. D.（ノースウエスタン大学）

現　在　早稲田大学名誉教授

専攻科目　可積分系の数理，差分学

主要著書　『直接法によるソリトンの数理』（岩波書店）

『差分方程式講義』（サイエンス社）

高橋　大輔（たかはし　だいすけ）

1985年　東京大学大学院工学系研究科修士課程修了

1989年　工学博士

現　在　早稲田大学理工学部教授

専攻科目　非線形波動理論

主要著書　『数値計算』（理工系の基礎数学８），（岩波書店）

『理工基礎　線形代数』（ライブラリ新数学大系E5），（サイエンス社）

差分と超離散

2003年２月25日　初版１刷発行
2003年９月10日　初版２刷発行

著　者　広田良吾
高橋大輔

発行者　南條光章

発行所　**共立出版株式会社**
東京都文京区小日向 4-6-19
電話 03-3947-2511（代表）
郵便番号 112-8700／振替口座 00110-2-57035
URL http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

印　刷　啓文堂

製　本　中條製本

社団法人
自然科学書協会
会員

検印廃止
NDC 413.8

ISBN 4-320-01729-3

Printed in Japan